正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ．

正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ.

【テーマ】：式の大小関係

方針

$A,\ B$ は $a,\ b$ に関して対称な式になっているので，$a \leqq b$ として考えても一般性を失いません．さらに，$x=\dfrac{a}{b}$ とおくことで 1 変数に帰着させます.

♣ ♠

解答

$A,\ B$ はともに $a,\ b$ に関して対称なので，$a \leqq b$ としても一般性を失わない.

$$\begin{aligned} B-A &= 2^{p-1}(a^p+b^p)-(a+b)^p \\ &= b^p\left\{2^{p-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^p+1\right)-\left(\frac{a}{b}+1\right)^p\right\} \end{aligned}$$

$b^p>0$ より，$\dfrac{a}{b}=x$ として，

$$f(x)=2^{p-1}(x^p+1)-(x+1)^p \qquad (0<x\leqq 1)$$

とおくとき，$f(x)$ の符号を調べればよい.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{p-1}\cdot px^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \end{aligned}$$

（ i ） $p>1$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &< p(x+1)^{p-1}-p(x+1)^{p-1}=0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $0<x\leqq 1$ で単調減少で，

$$f(1)=2^{p-1}\cdot 2-2^p=0$$

より，$f(x)\geqq 0$ を得る．等号は，$x=1$ すなわち $a=b$ のとき，成立する.

$$\therefore \quad A\leqq B$$

（ii） $p=1$ のとき，

$$f(x)=(x+1)-(x+1)=0$$

より，$f(x)=0$ を得る.

$$\therefore \quad A=B$$

（iii） $0<p<1$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(2x)^{p-1}-p(x+1)^{p-1} \\ &= \frac{p}{(2x)^{1-p}}-\frac{p}{(x+1)^{1-p}} \\ &> \frac{p}{(2x)^{1-p}}-\frac{p}{(2x)^{1-p}}=0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $0<x\leqq 1$ で単調増加で，$f(1)=0$ より，$f(x)\leqq 0$ を得る．等号は，$x=1$ すなわち $a=b$

のとき，成立する．

$$\therefore\quad A \geqq B$$

ゆえに，(i)〜(iii) より，求める大小関係は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < p < 1} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{A \geqq B} \quad \text{**（等号は，$a=b$ のとき成立）**} \\ \boldsymbol{p = 1} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{A = B} \\ \boldsymbol{p > 1} \text{ **のとき，**} & \boldsymbol{A \leqq B} \quad \text{**（等号は，$a=b$ のとき成立）**} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

ポイントは，2 つあります．1 つ目は，a, b の対称性に着目して，a, b の大小関係を決めることです．大小関係はどちらでも構いません．2 つ目は，a, b という 2 つの文字を $x = \dfrac{a}{b}$ とおくことで，1 つの文字にすることです．こうすることで，方針が立てやすくなります．しかも，a, b の関係式を先に決めているので，x のとり得る値も決まります．大切な考え方を含む問題なので，類題が出たときには気付けるようになっておきましょう．そのためにも，復習は欠かせません．

この問題は，p で場合分けをする点にも注意が必要です．$f'(x)$ の符号を調べることでグラフの状況をつかもうと考えるのですが，p が 1 より大きいか小さいかで指数部分の符号が変わってしまいます．指数部分の符号が変わると $(2x)^{p-1}$ と $(x+1)^{p-1}$ の大小関係が変わるので，$0 < p < 1$, $p = 1$, $p > 1$ で場合分けが必要になります．よくわからないぞって人は，例えば，$x = \dfrac{1}{3}$ として考えてみて下さい．このとき，

$$(2x)^{p-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\ ,\quad \left(\frac{4}{3}\right)^{p-1}$$

となりますが，例えば，$p = \dfrac{1}{2}$, $p = 2$ のときで考えると，大小関係が逆転することが分かると思います．各自で計算して確かめてください．

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある.

（1） $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であることを示せ.

（2） $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成り立つことを示せ．また，この等号が成り立つのはどのような場合か.

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある.

(1) $AB^2+BC^2+CA^2>8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ.

(2) $AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 9$ が成り立つことを示せ. また, この等号が成り立つのはどのような場合か.

【テーマ】: 三角関数の図形への応用

方針

(1) は, 辺の長さが直径以下なる点に着目します. (2) は, 具体的に 3 点の座標を三角比を用いて設定すると良いでしょう.

解答

(1) **【証明】**

題意より, AB, BC, CA の長さは直径以下なので,

$$AB \leqq 2, \quad BC \leqq 2, \quad CA \leqq 2$$

よって,

$$\begin{aligned} AB^2+BC^2-CA^2 &> 8-CA^2-CA^2 \\ &= 8-2CA^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに, $AB^2+BC^2>CA^2$ が成り立つことから, $\angle B<90^\circ$ を得る. 同様にすれば, $\angle A<90^\circ$, $\angle C<90^\circ$ を得る. 以上より, $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることが示された. **(証明終)**

(2) **【証明】**

3 点 A, B, C の座標を

$$A(\cos\theta, \sin\theta), \quad B(\cos\theta, -\sin\theta), \quad C(\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \left(0<\theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ \theta \neq \alpha\right)$$

とおいても一般性を失わない. このとき, AB の中点を M とすると, $M(\cos\theta, 0)$ であり, 中線定理より,

$$AC^2+BC^2=2\left(AM^2+CM^2\right)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} AB^2+BC^2+CA^2 &= AB^2+2\left(AM^2+CM^2\right) \\ &= AB^2+2\left(\frac{1}{4}AB^2+CM^2\right) \\ &= \frac{3}{2}AB^2+2CM^2 \\ &= \frac{3}{2}\cdot 4\sin^2\theta+2\left\{(\cos\alpha-\cos\theta)^2+\sin^2\alpha\right\} \\ &= 6\sin^2\theta+2(1-2\cos\alpha\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &= 4+4\sin^2\theta-4\cos\alpha\cos\theta \\ &= 8-4\cos^2\theta-4\cos\alpha\cos\theta \\ &= 8-4(\cos^2\theta+\cos\alpha\cos\theta) \end{aligned}$$

$$= 8 - 4\left\{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\cos^2\alpha\right\}$$
$$\leqq 8 + \cos^2\alpha \leqq 9$$

等号は，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}\cos\alpha$ かつ $\cos^2\alpha = 1$ のとき，成立する．これは，$\cos\alpha = \pm 1$ であるが，$\cos\theta > 0$ より，$\cos\alpha < 0$ となるので，

$$\cos\alpha = -1,\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

より，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha = \pi$ のときである．すなわち，$\triangle$ABC が正三角形のとき，等号は成立する．　**（証明終）**

◇　♡

解説

方針を立てるのに四苦八苦する問題です．このような問題では，『平面幾何の知識を使う』,『座標を設定する』,『ベクトルを用いる』など様々な方法があります．そのどれを用いるかで解答がかなり変わります．本解答では，座標を設定し三角関数の最大値を求めるという問題に帰着させました．

（1） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ.

（2） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

（1） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ.

（2） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

【テーマ】：定積分と極限

方針

(2) では，まず，定積分を計算することから始めますが，$|\sin x|$ があるため区間を $k\pi \leqq x \leqq (k+1)\pi$ **で区切り，**k **の偶奇で場合分けを行います.**

♣ ♠

解答

（1） $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ **とおくと，**

$$
\begin{aligned}
I&=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx\\
&=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ 2I=e^{-\pi}+1$$

$$\therefore\ I=\boldsymbol{\frac{e^{-\pi}+1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） （1）**と同様に，部分積分を用いることで，次式を得る.**

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C\quad(C\ \textbf{は積分定数})$$

$I_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ **とおき，**$J_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ **とおく.**

（ｉ） k **が奇数のとき，**

$$
\begin{aligned}
J_k&=-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\
&=\Big[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\\
&=\frac{e^{-(k+1)\pi}}{2}+\frac{e^{-k\pi}}{2}\\
&=\frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)
\end{aligned}
$$

（ii） k **が偶数のとき，**

$$
\begin{aligned}
J_k&=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\
&=-\Big[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\\
&=-\left(\frac{-e^{-(k+1)\pi}}{2}-\frac{e^{-k\pi}}{2}\right)\\
&=\frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)
\end{aligned}
$$

ゆえに，（ｉ），（ii）**のいずれにしても**

$$J_k = \frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$$

となるので，

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} J_k \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1-(e^{-\pi})^{n-1}}{1-e^{-\pi}} \end{aligned}$$

ゆえに，求める極限値は，

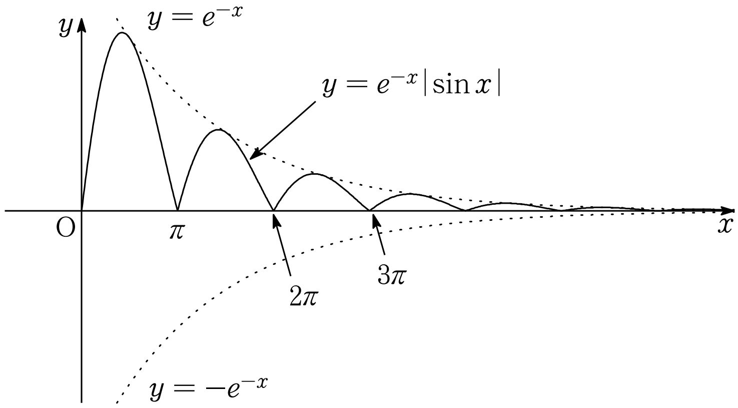
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1-(e^{-\pi})^{n-1}}{1-e^{-\pi}}\right) \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} \\ &= \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) **は，指数関数と三角関数の積の積分なので，同系出現タイプです．** $I=$ **などと置いて，部分積分法を** 2 **回行うと，同じ形が出てきます．**

(2) **は，区間が** $0 \leqq x \leqq n\pi$ **となっていて，被積分関数に** $|\sin x|$ **を含んでいるため，**$k\pi \leqq x \leqq (k+1)\pi$ **での積分を考えます．** $\sin x$ **の符号が** k **の偶奇で変わるので，場合分けが必要になります．非常によくあるタイプの積分なので，確実にできるようにしておきましょう．ちなみに，**$y=e^{-x}|\sin x|$ **のグラフは，次のようになります．このグラフは頻出なので，必ず覚えておきましょう．** $y=e^{-x}\sin x$ **のグラフは，**$y=e^{-x}$ **と** $y=-e^{-x}$ **のグラフに接しながら減衰していきます．減衰曲線とも呼ばれます．本問の場合は，絶対値がついているので，**$y=e^{-x}\sin x$ **のグラフの** x **軸の下方部分を** x **軸に関して対称移動することで，下図のようなグラフになります．**



n は自然数とし

$$f(x)=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする．このとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ において $1 \leqq f(x) < 2$ であることを証明せよ．

n は自然数とし

$$f(x)=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする．このとき，$-1\leqq x\leqq 1$ において $1\leqq f(x)<2$ であることを証明せよ．

【テーマ】：関数がとり得る値の範囲

方針

何から手をつけていいか悩みますが，まずは $f(x)$ を $\sum$ を用いて表してみましょう．

♣ ♠

解答

【証明】

$f(x)-1=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ **より，$-1\leqq x\leqq 1$ で**

$$0\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}<1$$

が成り立つことを示せばよい．ここで，$g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ とおくと，一般に k が 2 以上の偶数のとき，

$$\frac{x^k}{(k-1)k}+\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}=\frac{x^k(k+1+(k-1)x)}{(k-1)k(k+1)}=\frac{(1+x)k+(1-x)}{(k-1)k(k+1)}\geqq 0$$

より，n が偶数のとき，

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{x^n}{(n-1)n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)\geqq 0$$

であり，n が奇数のとき，

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{x^{n-1}}{(n-2)(n-1)}+\frac{x^n}{(n-1)n}\right)+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\geqq 0$$

となるので，いずれにしても $g(x)\geqq 0$ である．また，

$$|g(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\right|\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{|x|^{k+1}}{k(k+1)}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

であるから，$0\leqq g(x)<1$ が示された． （証明終）

♢ ♡

解説

関数と数列の融合問題で関数の値を評価する問題です．まず何をするかが問題で，本解答では $g(x)=f(x)-1$ とおくことで，$0\leqq g(x)<1$ を示そうとしています．k が偶数であれば k 次の項と $k+1$ 次の項を加えると必ず 0 以上になることを示し，これを利用して，n が偶数のときと奇数のときで場合分けを行っています．

$0 < a < 2\pi$ とする．$0 < x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \int_{x}^{x+a} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

と定める．

(1) $F'(x)$ を求めよ．

(2) $F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

(3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

$0 < a < 2\pi$ **とする．** $0 < x < 2\pi$ **に対して**

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

と定める．

(1)　$F'(x)$ **を求めよ．**

(2)　$F'(x) \leqq 0$ **となる** x **の範囲を求めよ．**

(3)　$F(x)$ **の極大値および極小値を求めよ．**

【テーマ】：定積分と極値

方針

(1) は，微分積分学の基本定理を用い，(2) は，和積の公式を利用します．(3) では，(2) の結果を用いて増減表を作成し，極大値と極小値を計算します．

♣　♠

解答

(1)　与えられた関数の両辺を x で微分して，

$$\boldsymbol{F'(x) = \sqrt{1-\cos(x+a)} - \sqrt{1-\cos x}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，

$$F'(x) \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{1-\cos(x+a)} \leqq \sqrt{1-\cos x}$$

両辺正であるから 2 乗して，

$$1-\cos(x+a) \leqq 1-\cos x \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x+a) - \cos x \geqq 0$$

和積の公式より，

$$-2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2} \geqq 0$$

$$\therefore \quad \sin\left(x+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2} \leqq 0$$

ここで，$0 < \dfrac{a}{2} < \pi$ より，$\sin\dfrac{a}{2} > 0$ であるから，

$$\sin\left(x+\frac{a}{2}\right) \leqq 0 \cdots\cdots ①$$

を得る．$\dfrac{a}{2} < x + \dfrac{a}{2} < 2\pi + \dfrac{a}{2}$ であり，$0 < \dfrac{a}{2} < \pi$, $2\pi < 2\pi + \dfrac{a}{2} < 3\pi$ であるから，① を満たす x の範囲は，

$$\pi \leqq x + \frac{a}{2} \leqq 2\pi$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\pi - \frac{a}{2} \leqq x \leqq 2\pi - \frac{a}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$F'(x) = 0$ となるのは，(2) より，

$$x = \pi - \frac{a}{2},\quad 2\pi - \frac{a}{2}$$

ゆえに，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	(2π)
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$x=\pi-\dfrac{a}{2}$ で極大値をとり，$x=2\pi-\dfrac{a}{2}$ で極小値をとる．

$$F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)=\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

ここで，$\theta=x+\pi$ とおくと，

$$\begin{aligned}F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos(x+\pi)}\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\quad\left(\because\ \ \cos\frac{x}{2}>0\right)\\&=2\sqrt{2}\Big[\,2\sin\frac{x}{2}\,\Big]_0^{\frac{a}{2}}=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}\end{aligned}$$

同様にして，$\theta=x+2\pi$ と置き換えて計算すると，

$$\begin{aligned}F\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos(x+2\pi)}\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx\\&=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\quad\left(\because\ \ \sin\frac{x}{2}>0\right)\\&=2\sqrt{2}\Big[\,-2\cos\frac{x}{2}\,\Big]_0^{\frac{a}{2}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，求める極値は，

$$\begin{cases}\textbf{極大値}\quad \boldsymbol{4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}} & \boldsymbol{\left(x=\pi-\frac{a}{2}\right)}\\ \textbf{極小値}\quad \boldsymbol{4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)} & \boldsymbol{\left(x=2\pi-\frac{a}{2}\right)}\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

◇ ♡

解説

（1）では，次の式を用いて計算しています．

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{f(x)}h(t)\,dt=h(f(x))f'(x)-h(g(x))g'(x)$$

（2）は，和積の公式を用いて積の形に変形することで求めることができます．（3）では，置換積分をしていますが，置換積分をしなくても

$$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

と変形することで，積分計算をすることもできます．

正の定数 a, b に対し，不等式

$$4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$$

を考え，次の問いに答えよ．

（1） $m > 0$ かつ m, n ともに整数であって，この不等式を満たすような m, n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ．

（2） $a = 8, b = 9, m \geqq 9$ であるときは，上の不等式を満たす整数 m, n の組は $n^2 = 4m + 1$ を満たすことを証明せよ．

（3） （2）の場合の m, n の組のうち，n が最も大きいものを求めよ．

正の定数 a, b に対し，不等式

$$4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$$

を考え，次の問いに答えよ．

(1)　$m > 0$ かつ m, n ともに整数であって，この不等式を満たすような m, n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ．

(2)　$a = 8, b = 9, m \geqq 9$ であるときは，上の不等式を満たす整数 m, n の組は $n^2 = 4m + 1$ を満たすことを証明せよ．

(3)　(2) の場合の m, n の組のうち，n が最も大きいものを求めよ．

【テーマ】：不等式を満たす整数の組

方針

(1) では，$\dfrac{a}{\sqrt{m}} \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{b}{m} \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす最小の整数 m を M として考えます．(2) では，n を偶数と奇数に分けて考えます．(3) では，(1), (2) の結果を利用します．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$4m < n^2 < 4m + \dfrac{a}{\sqrt{m}} + \dfrac{b}{m}$ ……①

$\dfrac{a}{\sqrt{m}} \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{b}{m} \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす最小の整数 m を M とすると，$m \geqq M$ を満たすすべての m で，① は

$$4m < n^2 < 4m + 1$$

となり，これを満たす整数 n は存在しないので，$0 < m < M$ となる．よって，m は有限個しかなく，これに対応する n も ① より有限個となる．以上より，題意は示された．**(証明終)**

(2)　**【証明】**

$a = 8, b = 9$ のとき，

$$4m < n^2 < 4m + \frac{8}{\sqrt{m}} + \frac{9}{m} \leqq 4m + \frac{8}{3} + 1 = 4m + \frac{11}{3}\quad (\because\ \ m \geqq 9)$$

n^2 は整数であるから，

$$n^2 = 4m + 1,\ 4m + 2,\ 4m + 3$$

である．

ここで，k を整数として，

$n = 2k$ のとき，　$n^2 = 4k^2$

$n = 2k + 1$ のとき，　$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$

となり，$n^2 = 4m + 2, 4m + 3$ とは表せない．したがって，$n^2 = 4m + 1$ を満たすことが示された．**(証明終)**

(3)　整数の組 (m, n) が存在するためには，

$$\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}>1$$

であればよく，このとき，

$$\frac{8}{\sqrt{m}}>1-\frac{9}{m}$$

$$8\sqrt{m}>m-9$$

$$m-8\sqrt{m}-9<0$$

$$(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-9)<0$$

$$\therefore\quad 0<\sqrt{m}<9$$

$$\therefore\quad 0<m<81$$

$m \geqq 9$ であるから，$9 \leqq m < 81$ である．このとき，$37 \leqq n^2 < 325$ であるから，これを満たす最大の整数 n は $n=17$ である．$n=17$ のとき，$m=72$ となるので，求める (m, n) の組合せは，

$(m, n)=(72, 17)$……(答)

解説

(1) は，方針が立てにくく感じたかもしれません．有限個しか存在しない，無限個存在するなどの証明は，よく出題される問題です．背理法を用いる場合が多くあるので，演習を積んでおきましょう．本問では，$m \geqq M$ を考えて，矛盾を導きました．(2) は，具体的に a, b, m の条件が与えられているので，n を偶奇に分けて考えれば，それほど難しくなく証明できます．(3) は，(m, n) の組が存在するための条件が $\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}>1$ であることに気付けるかどうかがポイントとなります．

1 から n までの番号が書かれた n 個の箱があり，各々の箱には $2n$ 本のくじが入っている．番号が l の箱には l 本の当たりが入っているとする．この条件で次の ①, ② を試行する．

① 無作為に箱を 1 つ選ぶ.

② ① で選んだ箱を用いて，くじを 1 本引いては戻すことを m 回繰り返す.

この試行で k 回当たりくじを引く確率を $p_n(m, k)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2, 0)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2, 1)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2, 2)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(m, 1)$ を m を用いて表せ.

1 から n までの番号が書かれた n 個の箱があり，各々の箱には $2n$ 本のくじが入っている．番号が l の箱には l 本の当たりが入っているとする．この条件で次の ①, ② を試行する．

① 無作為に箱を 1 つ選ぶ．

② ① で選んだ箱を用いて，くじを 1 本引いては戻すことを m 回繰り返す．

この試行で k 回当たりくじを引く確率を $p_n(m,\,k)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\,0)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\,1)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\,2)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(m,\,1)$ を m を用いて表せ．

【テーマ】：確率と区分求積法

方針

普通に和を計算することもできますが，区分求積法を用いて定積分で計算したほうが楽に求められます．

♣ ♠

解答

(1) $p_n(2,\,0)$ は 2 回くじを引いて当たりが出ない確率であるから，

$$p_n(2,\,0) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{2n-\ell}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(1-\frac{\ell}{2n}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n(2,\,0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(1-\frac{\ell}{2n}\right)^2\\ &= \int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 dx\\ &= \left[\,\frac{-2}{3}\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3\,\right]_0^1\\ &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{3}\\ &= \mathbf{\frac{7}{12}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$p_n(2,\,1)$ は 2 回くじを引いて当たりが 1 回出る確率であるから，

$$p_n(2,\,1) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{2\ell(2n-\ell)}{(2n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n(2,\,1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)\\ &= \int_0^1\frac{1}{2}x(2-x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\,x^2-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\\ &= \mathbf{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$p_n(2,\,2)$ は 2 回くじを引いて 2 回とも当たる確率であるから，

$$p_n(2,\,2)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\ell}{2n}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_n(2,\,2)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{\ell}{n}\right)^2\\&=\int_0^1\frac{1}{4}x^2\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{12}x^3\,\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{12}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に考えると，$p_n(m,\,1)$ は m 回くじを引いて，1 回当たる確率であるから，

$$p_n(m,\,1)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}{}_m\mathrm{C}_1\frac{\ell(2n-\ell)^{m-1}}{(2n)^m}=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{m\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)^{m-1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_n(m,\,1)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{m}{2^m}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)^{m-1}\\&=\int_0^1\frac{m}{2^m}x(2-x)^{m-1}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\int_0^1(2-(2-x))(2-x)^{m-1}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\int_0^1\left\{2(2-x)^{m-1}-(2-x)^m\right\}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\left[\,\frac{-2}{m}(2-x)^m+\frac{1}{m+1}(2-x)^{m+1}\,\right]_0^1\\&=\frac{m}{2^m}\left(-\frac{2}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{2^{m+1}}{m}-\frac{2^{m+1}}{m+1}\right)\\&=\frac{m}{2^m}\left(\frac{-m-2}{m(m+1)}+\frac{2^{m+1}}{m(m+1)}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2^{m+1}-m-2}{2^m(m+1)}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

(2) は，(1) と同様の考え方で求められます．(1) での勘違いが致命的になるので，題意を正確に把握して計算をしましょう．区分求積法であることが見抜ければ計算も比較的容易にすみます．(2) では，式がやや複雑になるので，少し技巧的な式変形を行っています．これは，しばしば用いられる式変形なので，できるようにしておくと強力な武器になるでしょう．例としては，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明する際，

$$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)=(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

と変形することで積分計算が楽になります．

a, b, c は実数の定数で，$a>0$, $b \geqq 0$ とする．実数 x, y に関する条件 p, q, r を次のように定める．

$$p \ : \ x^2+y^2 \leqq 1$$
$$q \ : \ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq a^2$$
$$r \ : \ y \leqq \sqrt{b}x+c$$

以下の各問いに答えよ．

（1） 条件 q が条件 p であるための十分条件となるとき，a の値の範囲を求めよ．

（2） 条件 r が条件 p であるための必要条件となるとき，b, c が満たす条件を求め，それを bc 平面に図示せよ．

a, b, c は実数の定数で，$a > 0,\ b \geqq 0$ とする．実数 x, y に関する条件 p, q, r を次のように定める．

$$p\ :\ x^2+y^2 \leqq 1$$
$$q\ :\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq a^2$$
$$r\ :\ y \leqq \sqrt{b}x + c$$

以下の各問いに答えよ．

（1） 条件 q が条件 p であるための十分条件となるとき，a の値の範囲を求めよ．

（2） 条件 r が条件 p であるための必要条件となるとき，b, c が満たす条件を求め，それを bc 平面に図示せよ．

【テーマ】：不等式を満たす領域

方針

十分条件と必要条件の関係から包含関係を考えます．

♣ ♠

解答

(1) 条件 p を満たす点 (x, y) の集合を U_p とし，条件 q を満たす点 (x, y) の集合を U_q とする．このとき，条件 q が条件 p であるための十分条件となるためには，

$$U_q \subseteqq U_p$$

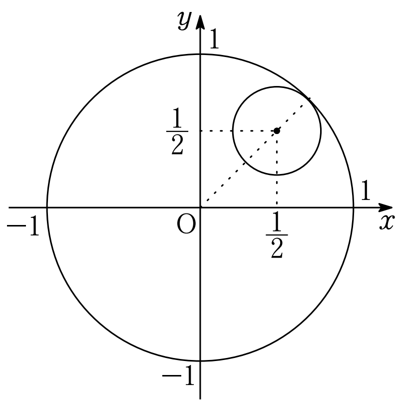
となればよい．$x^2+y^2=1$ と $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=a^2$ の半径はそれぞれ $1, a$ であり，中心間の距離は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，

$$1-a \geqq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff a \leqq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

が成り立てばよい．一方，題意より $a>0$ であるから，

求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{0 < a \leqq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



(2) 条件 r を満たす点 (x, y) の集合を U_r とする．直線 $y=\sqrt{b}x+c$ の傾きは 0 以上であり，条件 r が条件 p であるための必要条件となるためには，

$$U_p \subseteqq U_r$$

となればよい．その条件は，

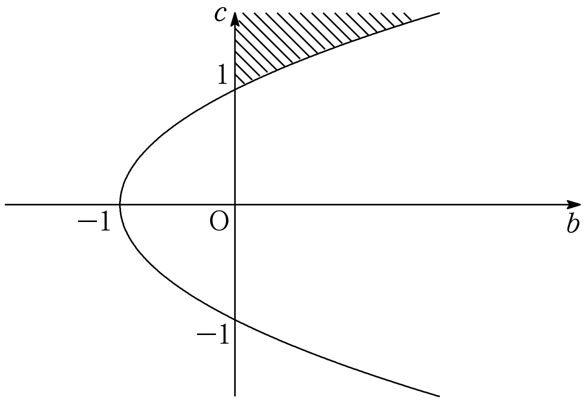
『$c \geqq 1$』かつ『原点と直線 $y=\sqrt{b}x+c$ の距離が 1 以上』

である．ゆえに，

$$c \geqq 1 \text{ かつ } \frac{|c|}{\sqrt{b+1}} \geqq 1$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{c \geqq 1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{c^2 \geqq b+1\ \ (b \geqq 0)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

したがって，b, c が満たす条件を bc 平面上に図示すると下図の斜線部分となる．ただし，境界線を含む．

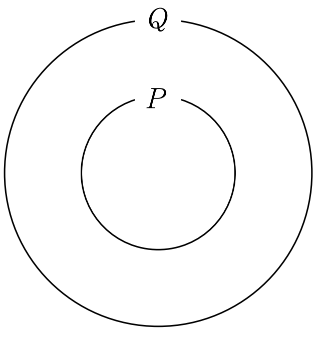


◇ ♡

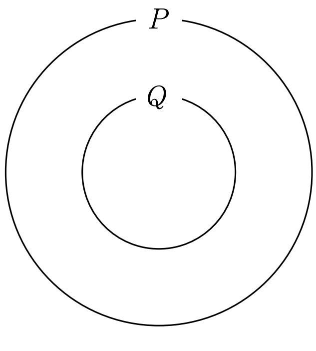
解説

必要条件と十分条件の関係をきちんと理解しておかなければ，まったく異なる解答になります．逆を言えば，それさえ理解できていれば基本的な問題なので，完答が狙えます．

条件 p, q を表す集合をそれぞれ P, Q とするとき，p が q の十分条件であることを示す図は，下左図です．また，p が q の必要条件であることを示す図は，下右図です．まずは，この関係をしっかり理解しましょう．例えば，p を哺乳類として q を人間とします．この関係を表しているのは，右図です．人間であれば必ず哺乳類ですが，哺乳類だからといって人間とは限りません．つまり，哺乳類は人間であるための必要条件だということになります．とくに，難関大学を目指している人は，包含関係をしっかり把握し，十分条件なのか必要条件なのかをきちんと考える習慣を身につけましょう．



P は Q であるための十分条件



P は Q であるための必要条件

『主語 (P)』が包み込まれている状態（左図）が十分条件，『主語 (P)』が他の条件を包み込んでいる状態（右図）が必要条件と考えるとよいでしょう．

正の整数 a, b, c, d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たすとする.

（1） d が 3 の倍数でないならば，a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ.

（2） d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば，a, b, c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることを示せ.

正の整数 a, b, c, d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たすとする.

(1)　d が 3 の倍数でないならば, a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ.

(2)　d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば, a, b, c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることを示せ.

【テーマ】：倍数と証明

方針

(1) では，自然数の 2 乗を 3 で割ると余りは，0 か 1 になることを利用します．(2) では，(1) の結果を踏まえて d が 2 で割り切れないときを考え，余りに着目した式を立てます．

解答

$a^2+b^2+c^2=d^2$ …… ①

(1)　**【証明】**

一般に自然数 n に対して，k を自然数とすると，

$n=3k$ のとき，　$n^2=9k^2$

$n=3k-1$ のとき，　$n^2=3(3k^2-2k)+1$

$n=3k-2$ のとき，　$n^2=3(3k^2-4k+1)+1$

となり，いずれにしても 3 で割った余りは 0 または 1 となる．d が 3 の倍数でないならば，① の右辺を 3 で割った余りは 1 となる．一方，x, y, z を自然数とし，p, q, r を 0 または ± 1 とするとき，

$$a=3x+p,\quad b=3y+q,\quad c=3z+r$$

とおくことができて，

$$a^2+b^2+c^2=3\{3(x^2+y^2+z^2)+2(xp+yq+zr)\}+p^2+q^2+r^2$$

となる．よって，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは $p^2+q^2+r^2$ であるから，

$$p^2+q^2+r^2=1$$

を満たす．p^2, q^2, r^2 が 0 または 1 であることから，p, q, r のうちちょうど 2 つが 0 であり，残り 1 つが 1 である．ゆえに，a, b, c の中に 3 の倍数はちょうど 2 つあることが示された．　**(証明終)**

(2)　**【証明】**

(1) と同様に考えると，自然数 n に対して，n^2 を 2 で割った余りは 0 または 1 となる．d が 2 の倍数でないならば d^2 を 2 で割った余りは 1 となる．一方，x', y', z' を自然数とし，p', q', r' を 0 または 1 とするとき，

$$a=2x'+p',\quad b=2y'+q',\quad c=2z'+r'$$

とおくことができて，

$$a^2+b^2+c^2=4(x'^2+y'^2+z'^2+x'p'+y'q'+z'r')+p'^2+q'^2+r'^2$$

となる．よって，$a^2+b^2+c^2$ を 2 で割った余りは $p'^2+q'^2+r'^2$ であるから，

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1$$

を満たす．p', q', r' が 0 または 1 であることから，p', q', r' のうちちょうど 2 つが 0 であり，残り 1 つが 1 となる．さらに，d が 3 の倍数でないならば，(1) の結果から a, b, c のうちちょうど 2 つが 3 の倍数となるので，a, b, c のうち少なくとも 1 つは 2 かつ 3 の倍数であることが分かる．すなわち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることが示された．**（証明終）**

◊ ♡

解説

自然数の 2 乗を 3 で割った余りが 0 または 1 になるのは，よく知られた事実で入試でもよく用いられる知識です．一方 (2) は，余りに着目した等式を作ることがポイントになります．(1) の結果を踏まえて考えれば，a, b, c のうち 2 つが 2 の倍数となることを示せばよいという方針が立つでしょう．

合同式の知識を使えば，もう少し簡潔な解答になりますが，本質的には同じことをしているので，仕組みが理解できればどちらの方法をとっても構いません．

いずれにしても，剰余に関する問題は入試でも頻出なので，類題演習をして免疫をつけておきましょう．

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする．

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする．

(1) C 上に点 $\mathrm{A}(t,\,1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2) 点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

【テーマ】：直線の通過領域

方針

垂直二等分線の方程式を t に関する 2 次関数とみなして考えます．

♣ ♠

解答

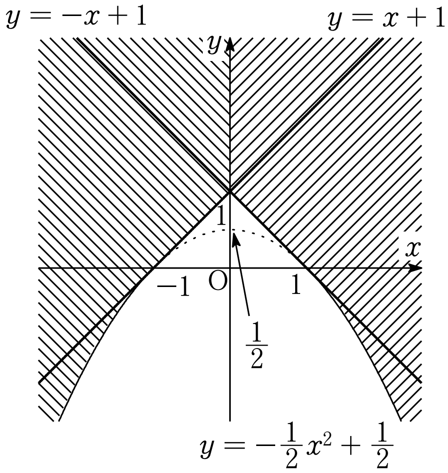
(1) 直線 OA の傾きは $\dfrac{1}{t}$ より，OA の中点 $\left(\dfrac{t}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ を通り傾き $-t$ の直線が求める垂直二等分線であるから，

$$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2} \iff \boldsymbol{y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，$y=\dfrac{1}{2}t^2-xt+\dfrac{1}{2}$ であるから，これを t の 2 次関数とみなして平方完成すると，

$$y=\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

よって，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ と $y=\dfrac{1}{2}(t-x)^2-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ は常に $x=t$ で接していることがわかる．
ゆえに，点 A を $|t| \geqq 1$ で動かすとき，これらの接点は $|x| \geqq 1$ を動くことになるので，垂直二等分線の通過する領域は，右図斜線部分で，境界線を含む．



別解 (2) は，次のように考えて，解くこともできる．

$y=\dfrac{1}{2}t^2-xt+\dfrac{1}{2}$ において，$x=k$ (k：定数) として t の 2 次関数と考える．このとき，$y=f(t)$ とすると，

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2-kt+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t-k)^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}$$

このとき，$|t| \geqq 1$ での y のとり得る値の範囲を求めよう．

(i) $|k| \geqq 1$ のとき，$t=k$ で最小値をとり，最大値は存在しないので，y のとり得る値の範囲は，

$$y \geqq f(k)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}$$

(ii) $|k| \leqq 1$ のとき，$t=-1$ または $t=1$ のいずれかで最小値をとる．$\min\{a,\,b\}$ を $a,\,b$ の小さい方をとる関数とするとき，

$$y \geqq \min\{f(-1),\,f(1)\}=\min\{k+1,\,-k+1\}$$

(i), (ii) より，k を x に戻して，これらを満たす領域を図示すると，**解答** と同じ図を得る．

◇ ♡

解説

最初の解答は，直線が常に接する曲線（包絡線）を求めています．そして，x のとり得る値から，その接点が動く範囲を求めます．あとは，直線がその曲線に接しながら動くとき，通過する領域を求めればよいことになります．定規などを用いて動きを確認すると分かりやすいでしょう．**別解** は，包絡線を求めるのではなく，x の値を固定して y のとり得る値を求めています．これは，最大値・最小値を求める問題に帰着するため，比較的慣れている人も多いと思いますが，手順が多くなり面倒になることもしばしばあります．しかし，包絡線が見つけにくい問題などでは威力を発揮することもあるので，どちらの解法も知っておくとよいでしょう．ちなみに，最大値関数 $\max\{a, b\}$ や最小値関数 $\min\{a, b\}$ は，入試でも時々出題される記号なので，知っておきましょう．

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す．$a_m = [\,\sqrt{m}\,]$ $(m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ に対して，数列 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ を $b_1 = 0$, $k \geqq 2$ のとき $a_m < k \leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k = m$ と定める．次の問いに答えよ．

（1） 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

（2） すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^{n} b_k = n^3$ が成り立つことを示せ．

（3） $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} [\,\sqrt{m}\,]$ を求めよ．

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す．$a_m=[\,\sqrt{m}\,]$ $(m=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ に対して，数列 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ を $b_1=0$, $k \geqq 2$ のとき $a_m<k \leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\,\sqrt{m}\,]$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号で定義される数列

方針

実際に $\{a_m\}$ を書き出してみると規則性が見つかります．

♣　♠

解答

(1)　数列 $\{a_m\}$ を順に書き出すと，

$$1,\ 1,\ 1\ |\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ |\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ |\ 4,\ 4,\ \cdots\cdots$$

となり，数 n を一つの群と考え，第 n 群とする．$[\,x\,]$ の定義から，数列 $\{a_m\}$ の項は，

$$n^2 \leqq m \leqq (n+1)^2-1 \text{ のとき，} a_m=n$$

であることがわかる．$a_m<b_k \leqq a_{m+1}$ は a_m が第 $k-1$ 群の末項であることを意味しているので，

$$\begin{aligned} b_k &= 3+5+7+\cdots+(2k+1) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i+1) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+k-1 \\ &= \boldsymbol{k^2-1}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

となる．

(2)（ i ）$n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=a_1+b_1=1+1=1,\quad (\text{右辺})=1^3=1$$

となり，成り立つ．

（ii）$n=i$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{i^2} a_m+\sum_{k=1}^{i} b_k=i^3 \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定する．

$n=i+1$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i+1} b_k = \sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{m=i^2+1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k + b_{i+1}$$

$$= i^3 + a_{i^2+1} + a_{i^2+2} + a_{i^2+3} + \cdots\cdots + a_{(i+1)^2} + (i+1)^2 - 1 \quad (\because \ ①, (1))$$

$$= i^3 + \underbrace{[\sqrt{i^2+1}\,] + [\sqrt{i^2+2}\,] + [\sqrt{i^2+3}\,] + \cdots\cdots}_{\text{ここはすべて } i \text{ になる}} + [\sqrt{(i+1)^2}\,] + (i+1)^2 - 1$$

$$= i^3 + \underbrace{i + i + \cdots\cdots + i}_{i \text{ が } 2i \text{ 個}} + (i+1) + i^2 + 2i$$

$$= i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

$$= (i+1)^3$$

よって，$n = i+1$ のときも成り立つ.

以上より，示された.

(3) (1), (2) より,

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,] = n^3 - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= n^3 - \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1)$$

$$= n^3 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n$$

$$= \frac{1}{6}n\{6n^2 - (n+1)(2n+1) + 6\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

本問のように $a_m = [\sqrt{m}\,]$ で定義された数列は，m が平方数から平方数までは，同じ値をとることに着目して群数列を考えればよいことがわかります．本問では，設問の順番を見る限り，(2) を帰納法で証明させて $\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,]$ を計算させようとしていますが，群数列を用いればそんな方法をとらなくても次の式で求めることができます.

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,] = \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) + n = \cdots = \frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5)$$

これは，初項から第 n^2 項までの和を求めよという問題なので，群数列で考えれば，第 1 群の初項から第 n 群の初項までの和を求めよという問題と同じことがわかります．したがって，第 k 群の数 k が $2k+1$ 個あることから，第 1 群から第 $n-1$ 群の末項までの和 $\left(\sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1)\right)$ を求め最後に，第 n 群の初項 n を加えればよいわけです.

自然数 n に対し

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．

（1） 次の不等式を示せ．

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \right| \leqq \frac{1}{n+1}$$

（2） $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ．

（3） 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

自然数 n に対し

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　次の不等式を示せ．

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$$

(2)　T_n-2S_n を n を用いて表せ．

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，実際に S_n を代入してみれば方針が見えてきます．積分区間に着目してこの区間で成り立つ不等式を考えましょう．(2) は，S_n の被積分関数が等比数列の和の形になっていることに気付くことがポイントです．(3) は，(1), (2) の結果を用いましょう．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\right|=\left|\int_0^1\frac{-(-x)^n}{1+x}\,dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\right|$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$1\leqq 1+x\leqq 2$ より，

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{1+x}\leqq 1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{2}x^n\leqq\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$$

よって，

$$\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\right|\leqq\left|\int_0^1 x^n\,dx\right|=\frac{1}{n+1}$$

となり，示された．　　　　**(証明終)**

(2)　$\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}$ は初項 1 ，公比 $-x$ ，項数 n の等比数列の和を表しているので，

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^1\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}\}\,dx\\&=\Big[\,x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\,\Big]_0^1\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\\&=-1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)+\frac{(-1)^n}{n+1}\end{aligned}$$

$$= -1 + 2S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

ゆえに，$T_n - 2S_n = \boldsymbol{\frac{(-1)^n}{n+1} - 1}$……(答)

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 = \log 2$ より，(1) から，

$$|S_n - \log 2| \leqq \frac{1}{n+1}$$

$n \to \infty$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - \log 2| = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \log 2$$

(2) より，

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(2S_n + \frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right)$$

$$= \mathbf{2\log 2 - 1}……(答)$$

♢　　　♡

解説

類題の経験がないとやや難しく感じるでしょう．問題の大きな流れは，(1) で S_n の極限値を求める準備をしておき，(2) で，S_n と T_n の関係式を導き，(3) でそれらを用いてはさみうちの原理から T_n の極限値を求めるのですが，(2) で S_n と T_n の関連を見つけるのに苦労するかもしれません．

平面上で，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．

円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, θ で表せ．

(4) $\mathrm{PA}=3$, $\mathrm{PB}=2$ とする．$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ．

平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．

円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, θ で表せ．

(4)　$\mathrm{PA}=3$, $\mathrm{PB}=2$ とする．$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ．

【テーマ】：ベクトルと図形

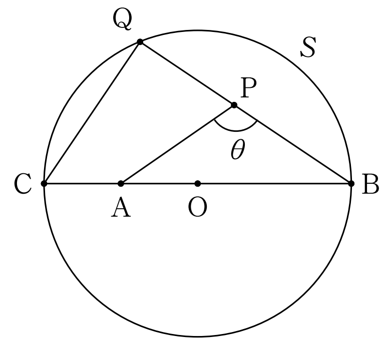
方針

(2) では，$\cos\theta$ のとり得る値を求めるので，内積を用います．(3) では，$\mathrm{QC}\perp\mathrm{QB}$ を用います．

♣　♠

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$……(答)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\\&=2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\\&=\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(2)　**【証明】**

点 P は円の内部にあることから，$\angle\mathrm{CPB}$ は鈍角である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\vec{b}<0$ となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\vec{b}<0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}<0$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2<0$$

$$\therefore\quad 4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2<0$$

$\left|\vec{b}\right|>0$ であるから，

$$\cos\theta<\frac{\left|\vec{b}\right|}{4\left|\vec{a}\right|}$$

が成り立ち，示された．　**(証明終)**

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\vec{b}$ $(k<0)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{4}{3}\vec{a}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}\cdot\vec{b}=0$ より,

$$\left\{\frac{4}{3}\vec{a}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$$

$$\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$\left|\vec{b}\right|\neq 0$ であるから,

$$k+\frac{1}{3}=\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3\left|\vec{b}\right|}\quad\Longleftrightarrow\quad k=\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta-\left|\vec{b}\right|}{3\left|\vec{b}\right|}$$

(2) より, $\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta>0$ であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=|k|\left|\vec{b}\right|=\frac{\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\boldsymbol{\frac{\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　題意より, $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$ である.

$$\triangle\mathrm{QAB}=(1+|k|)\triangle\mathrm{PAB}=(1-k)\cdot\frac{3}{2}\triangle\mathrm{POB}$$

$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき,

$$\frac{3}{2}(1-k)=3\quad\Longleftrightarrow\quad k=-1$$

このとき,

$$\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta-\left|\vec{b}\right|}{3\left|\vec{b}\right|}=-1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{4\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2}{3\left|\vec{b}\right|^2}=-1$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$$

よって,

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot4-4}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

―――――― ◇ ―――――― ♡ ――――――

解説

(2) では, なす角が鈍角であれば内積は負の値をとることがポイントになります. また, (3) では, 点 Q が円周上にあることと, 線分 BC が円の直径になることから, $\mathrm{QC}\perp\mathrm{QB}$ となることを見抜き, 内積を利用します. いずれにしても内積の計算をうまく利用することがポイントになる問題です.

座標平面上の点 $(1,\ 0)$ を A とする．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とし半径が 1 の円周上の 2 点 P, Q は，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$, $\angle\mathrm{AOQ}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$ ，$0<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ を満たす．また，点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を B とし，点 C を四角形 BPQC が平行四辺形になるように定める．ただし，点 P, Q の y 座標は正とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） 点 C の座標を θ を用いて表せ．

（2） 四角形 BPQC の面積の最大値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

座標平面上の点 $(1, 0)$ を A とする．原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を中心とし半径が 1 の円周上の 2 点 P, Q は，$\angle\mathrm{AOP} = \theta$, $\angle\mathrm{AOQ} = \theta + \dfrac{\pi}{3}$ ，$0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$ を満たす．また，点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を B とし，点 C を四角形 BPQC が平行四辺形になるように定める．ただし，点 P, Q の y 座標は正とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） 点 C の座標を θ を用いて表せ．

（2） 四角形 BPQC の面積の最大値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

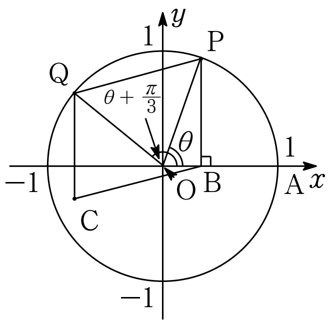
【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

点 C の座標を求めるときは，ベクトルを用います．

♣ ♠

解答



（1） $\mathrm{PB} = \sin\theta$ であり，四角形 BPQC が平行四辺形であることから，
$\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ である．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}}\\ &= \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),\ \ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) + (0,\ -\sin\theta)\\ &= \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\ \ -\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\right) \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（2） QC と x 軸の交点を H とすると，

$$\mathrm{H}\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),\ \ 0\right)$$

であるから，

$$\mathrm{OH} = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

よって，四角形 BPQC の面積を $S(\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \mathrm{PB} \times \mathrm{HB}\\ &= \sin\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta\\ &= \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{3} < 2\theta - \dfrac{\pi}{3} < \pi$ より，

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$$

$$\therefore\ \ 0 < \frac{1}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \leqq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となるので，$2\theta - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{5}{12}\pi$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ をとる．以上より，求める最大値とそのときの θ の値は，

$$\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \left(\theta = \frac{5}{12}\pi\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

点 C の座標をどのように求めるかですが，ベクトルを用いる方法が楽に求められる場合が多いです．本問ならば，点 Q の座標さえ分かれば，ベクトルを用いなくてもそれほど苦労しませんが，汎用性を高めるためベクトルを用いる解法を知っておきましょう．(2) では，面積を θ で表すことができれば，基本的な三角関数の最大値問題です．角を統一し，合成して求めましょう．

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．点 A$(-2,\,0)$ を通る直線が $y>0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする．自然数 $n \geqq 2$ に対して点 A を通る $(n-1)$ 本の直線で $\angle\mathrm{OAP}$ を n 等分する．これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1,\,\cdots,\,l_{n-1}$ とし，直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k，他方を R_k とする．

(1) $\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2$ を n と k を用いて表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2\right)$ を求めよ．

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．点 A$(-2,0)$ を通る直線が $y>0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする．自然数 $n \geqq 2$ に対して点 A を通る $(n-1)$ 本の直線で $\angle$OAP を n 等分する．これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1, \cdots, l_{n-1}$ とし，直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k，他方を R_k とする．

(1)　$\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2$ を n と k を用いて表せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2\right)$ を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

接線を求めて，n 等分した角の 1 つの角度を求めます．三角比をうまく利用しましょう．

解答

(1)　点 A を通る直線の方程式は，傾きを m として

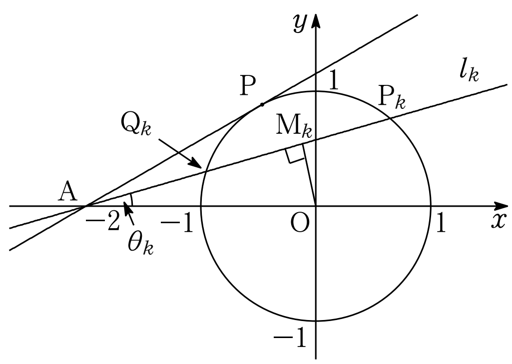
$$y=m(x+2) \iff mx-y+2m=0$$

とおける．これが円 $x^2+y^2=1$ と接するとき，

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$4m^2=m^2+1$$

$$\therefore\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



となる．題意より $y>0$ で接するので，$m>0$ であるから，$m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る．よって，

$$\tan\angle\mathrm{OAP}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より，} \angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{6}$$

である．ここで，l_k と x 軸のなす角を θ_k とすると，$\theta_k=\dfrac{k\pi}{6n}$ である．$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の中点を M_k とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2&=(\mathrm{AR}_k+\mathrm{AQ}_k)(\mathrm{AR}_k-\mathrm{AQ}_k)\\&=2\mathrm{AM}_k\cdot 2\mathrm{QM}_k\end{aligned}$$

ここで，

$$\mathrm{AM}_k=\mathrm{OA}\cos\theta_k=2\cos\theta_k$$

$$\mathrm{QM}_k=\sqrt{1-\mathrm{OM}_k{}^2}=\sqrt{1-4\sin^2\theta_k}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2&=8\cos\theta_k\sqrt{1-4\sin^2\theta_k}\\&=\boldsymbol{8\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}}\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)　(1) において，$k=n$ のとき，$\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2=0$ となるので，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(8\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}\right)\\
&= \int_0^1\left(8\cos\frac{\pi}{6}x\sqrt{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}\right)dx
\end{aligned}
$$

x	$0 \to 1$	
t	$0 \to \frac{1}{2}$	

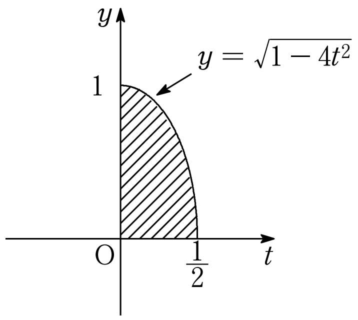
ここで，$\sin\frac{\pi}{6}x=t$ とおくと，$\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}x\,dx=dt$ であり，
x, t の対応は，右表のようになるので，楕円の面積を利用して，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(8\cdot\frac{6}{\pi}\sqrt{1-4t^2}\right)dt\\
&= \frac{48}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4t^2}\,dt\\
&= \frac{48}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{1}{2}\\
&= \mathbf{6}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

◇　　　　♡

(1) では，まずどの角を n 等分しているかを求めるため，$\angle\mathrm{OAP}$ を求めます．角度が分かれば直線 l_k と x 軸とのなす角が分かるはずなので，これをもとにして P_k, Q_k を求めますが，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の中点を M_k とすれば直角三角形が作れるので，これをヒントに三角比を用いて長さを出すとよいでしょう．

(2) では，区分求積法を用いて極限値を計算します．一度，置換積分をして t に関する積分にしていますが，最後の部分の計算は，楕円の面積を利用すると積分計算があっさり終わります．$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4t^2}\,dt$ は，右図の斜線部分の面積を表しているので，楕円の内部の面積の $\frac{1}{4}$ がこの定積分の値になります．



公 式　楕円の面積

楕円 ： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれる部分の面積は，$\boldsymbol{\pi ab}$ である．

1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，辺 OC の中点を M，辺 AB の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\theta=\angle\mathrm{AMN}$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$0<s<1$ とする．線分 MN を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, s を用いて表せ．

(3)　三角形 ABM の外心を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(4)　2 直線 OA と OB に平行で点 C を通る平面を α とする．点 A, B, M を通り，平面 α 上に中心をもつ球面を S とする．S の中心を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，辺 OC の中点を M，辺 AB の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\theta=\angle\mathrm{AMN}$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $0<s<1$ とする．線分 MN を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, s$ を用いて表せ．

(3) 三角形 ABM の外心を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．

(4) 2 直線 OA と OB に平行で点 C を通る平面を α とする．点 A, B, M を通り，平面 α 上に中心をもつ球面を S とする．S の中心を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．

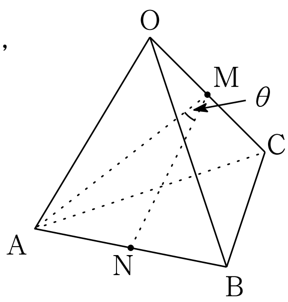
【テーマ】：空間ベクトル

方針

(1) は，三角比の定義に戻って考えます．(2) は (3) の，(3) は (4) のヒントになる設問なので，問題の繋がりを捉えながら考えます．

♣ ♠

解答



(1) $\angle\mathrm{OMA}=90^\circ$, $\angle\mathrm{OAM}=30^\circ$ より，$\mathrm{AM}=1\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$\angle\mathrm{MNA}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．したがって，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AM}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$……(答)

(2) 題意より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+(1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}(1-s)\vec{c}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(3) $\triangle$AMB は二等辺三角形で MN は AB の垂直二等分線なので，外心 Q は線分 MN 上にある．Q から MB に下ろした垂線の足を L とすると，L は線分 MB の中点であるから，

$$\mathrm{ML}=\frac{1}{2}\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

である．$\angle\mathrm{QML}=\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MQ}}\iff\mathrm{MQ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

これより，$\mathrm{MQ}:\mathrm{QN}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}:\dfrac{\sqrt{2}}{8}=3:1$ となるので，(2) で $s=\dfrac{3}{4}$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}}\text{……(答)}$$

(4)　3 点 A, B, M は点 R から等距離にあるので，点 R から平面 ABM に下ろした垂線の足は，△ABM の外心 Q と一致する．すなわち，

QR ⊥（平面 ABM）…… ①

である．一方，

AM ⊥ OC かつ BM ⊥ OC

であるから，△ABM は線分 OC と垂直である．したがって，QR // OC であるから，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表すことができる．(3) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\left(\frac{1}{8}+t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

を得る．一方，点 R は △OAB に平行で点 C を通ることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\vec{a}+v\vec{b}+\vec{c}$$

と表すこともできる．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから，$u=v=\dfrac{3}{8}$, $t=\dfrac{7}{8}$ を得る．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\vec{c}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇　♡

解説

正四面体の各面は正三角形です．したがって，中点を取ることで直角三角形ができますから，これより三角比の定義が使えることがわかります．(2) 以降は，前の設問の結果をうまく用いることで解決できます．特に (4) では，平面が線分に垂直であるという条件から QR // OC という条件を見つけてくることが重要なポイントです．ある程度丁寧な図をかくことも大切ですが，平面と線分が垂直になるための条件など，基本的な知識が必要になる問題です．

$f(x) = e^{-x}\cos x$ とする.

(1)　$e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$ を微分せよ.

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ.

(3)　自然数 n に対して,$S_n = \dfrac{1}{n}\left\{f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) + f\left(\dfrac{2\pi}{2n}\right) + f\left(\dfrac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n\pi}{2n}\right)\right\}$ とおく.次の式が成り立つことを示せ.

$$S_n < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < S_n + \frac{1}{n}$$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

$f(x)=e^{-x}\cos x$ とする.

(1) $e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して, $S_n=\dfrac{1}{n}\left\{f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\dfrac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n\pi}{2n}\right)\right\}$ とおく. 次の式が成り立つことを示せ.

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1), (2) は, 問題文にしたがうだけです. (3) では, $f(x)$ が単調減少であることと $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を n 等分して考えます.

♣ ♠

解答

(1)
$$\frac{d}{dx}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$$
$$=\boldsymbol{2e^{-x}\cos x}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) (1) より,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)=\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) **【証明】**

区間 $\dfrac{k-1}{2n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{k}{2n}\pi$ で $f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)<0$ より $f(x)$ は単調減少である. よって,
$$f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
である. ゆえに,
$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)dx<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)dx$$
$$\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
$k=1, 2, \cdots\cdots, n$ として, 辺々加えると,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)<\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
$$\frac{\pi}{2n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$
$$<\frac{\pi}{2n}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}S_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < \frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}f(0) - \frac{1}{n}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{2}S_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < \frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}\right) \qquad \left(\because\ \ f(0) = 1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$$

$$\therefore\ \ S_n < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < S_n + \frac{1}{n}$$

ゆえに，示された．　**（証明終）**

(4)　(2), (3) より，

$$S_n < \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi} < S_n + \frac{1}{n} \iff \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi} - \frac{1}{n} < S_n < \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi}$$

$n \to \infty$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi}} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

(2) の積分は，(1) の結果を用います．(1) がない場合は，部分積分法を用いて計算します．頻出問題なので，誘導なしでできるようにしておきましょう．

(3) は，区間 $\dfrac{k-1}{2n}\pi \leqq x \leqq \dfrac{k}{2n}\pi$ で $f(x)$ が単調減少であることを見つけます．これによって不等式が立式できます．区間を n 等分して考える部分がポイントです．

(4) は (3) の不等式からはさみうちの原理により極限を求める典型的な問題です．

本問の山場は (3) です．この問題ができるかどうかがこの問題での得点率を大きく左右します．入試では，合否を分ける部分になりますので，熟考し方針を導いてください．

$n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots$ に対して $I(n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおくとき，次の各問いに答えなさい．

（1）　部分積分法を用いて，$I(n+2)$ と $I(n)$ の間の関係式を求めなさい．

（2）　$I(2m-1)I(2m)$ を求めなさい．

（3）　$k \geqq n$ ならば $I(k) \leqq I(n)$ となることを示しなさい．

（4）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)=0$ であることを示しなさい．

$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して $I(n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおくとき，次の各問いに答えなさい.

(1)　部分積分法を用いて，$I(n+2)$ と $I(n)$ の間の関係式を求めなさい.

(2)　$I(2m-1)I(2m)$ を求めなさい.

(3)　$k \geqq n$ ならば $I(k) \leqq I(n)$ となることを示しなさい.

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)=0$ であることを示しなさい.

【テーマ】：定積分と極限

方針

漸化式を求めるので，部分分数分解を利用します.（2）以降は，前問の結果を利用しながら示していきます.

♣　♠

解答

(1)

$$\begin{aligned}I(n+2)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\sin^{n+1} x\,dx\\&=\Big[-\cos x\cdot\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n+1)\sin^n x\cos x\,dx\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x-\sin^{n+2}x)\,dx\\&=(n+1)\{I(n)-I(n+2)\}\end{aligned}$$

$$(n+2)I(n+2)=(n+1)I(n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I(n+2)=\frac{n+1}{n+2}I(n)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned}I(2m-1)&=\frac{2m-2}{2m-1}I(2m-3)\\&=\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}I(2m-5)\\&=\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}I(1)\\I(2m)&=\frac{2m-1}{2m}I(2m-2)\\&=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}I(2m-4)\\&=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}I(2)\end{aligned}$$

したがって，

$$I(2m-1)I(2m)=\frac{1}{m}I(2)I(1)$$

を得る．ここで，

$$I(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I(2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\Big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

であるから，

$$I(2m-1)I(2m)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4m}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3）【証明】

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$k \geqq n$ のとき，$\sin^k x \leqq \sin^n x$ が成り立つ．よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \iff I(k) \leqq I(n)$$

（証明終）

（4）

$I(n) \geqq 0$ は明らかで (2), (3) より，

$$0 \leqq \{I(2m+1)\}^2 \leqq \{I(2m)\}^2 \leqq I(2m-1)I(2m)=\frac{\pi}{4m}$$

である．$m \to \infty$ のとき，$\dfrac{\pi}{4m} \to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{m\to\infty} I(2m)=0,\quad \lim_{m\to\infty} I(2m+1)=0$$

である．ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)=0$ が示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

定積分から漸化式を求める際は，部分積分を用いることが多くあります．本問もそのタイプで，この問題のポイントは，$\sin^{n+1} x=\sin x \sin^n x$ と変形することにあります．これは $\cos^{n+1} x$ についても同じです．ただし，$\tan^{n+2} x$ は少し様子が変わってきます．$\tan^{n+2} x$ の場合は，

$$\tan^{n+2} x=\tan^2 x \tan^n x=\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\tan^n x$$

と変形して部分積分を行います．一度は，漸化式を求めておくとよいでしょう．

(2) 以降は，前問の結果を利用しますが，類題の経験がないと流れがわからないでしょう．

(2) では，$I(2m-1)$, $I(2m)$ を個別に求めて掛け算をすることで約分ができてシンプルな形になります．ただし，注意したいのは，与えられた $I(n)$ は $n=1, 2, \cdots$ で定義されているという点です．$I(0)$ は定義されていないので，$I(0)$ までずらしてしまうと，減点対象となります．(3) では，積分区間に着目して不等式を作る典型的な問題です．底が 1 より小さいので，指数部分の大小と全体の大小が逆転することに注意しましょう．(4) では，はさみうちの原理を用いますが，ここでは，(2), (3) の結果から $I(2m)$ と $I(2m+1)$ の極限を求めています．これは n が偶数のときと奇数のときの極限を計算していることになり，それらが同じ値に収束するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ が存在します．もしも，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} I(2m) \neq \lim_{m\to\infty} I(2m+1)$ となれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ は存在しません．

初項 $a_1 = p$（p は自然数）と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1)\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

できまる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$[\,4\,] = 4$，$\left[\,\frac{5}{2}\,\right] = 2$，$\left[\,\frac{1}{3}\,\right] = 0$，$[\,0\,] = 0$ である．

（1） $p = 21$ のとき，a_5 を求めよ．

（2） $n \geqq 1$ のとき，$0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ を示せ．

（3） $a_5 = a_1$ となるための p の条件を求めよ．

（4） p より大きい自然数 n に対し，$a_n = 0$ となることを示せ．

初項 $a_1 = p$（p は自然数）と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1)\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

できまる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$[\,4\,] = 4$，$\left[\,\frac{5}{2}\,\right] = 2$，$\left[\,\frac{1}{3}\,\right] = 0$，$[\,0\,] = 0$ である．

（1） $p = 21$ のとき，a_5 を求めよ．

（2） $n \geqq 1$ のとき，$0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ を示せ．

（3） $a_5 = a_1$ となるための p の条件を求めよ．

（4） p より大きい自然数 n に対し，$a_n = 0$ となることを示せ．

【テーマ】：ガウス記号を含んだ漸化式

方針

(1) は具体的に計算をして求めます．(2) は数学的帰納法とガウス記号の性質から示せます．(3), (4) は (2) の結果を利用して示します．

解答

（1） $a_1 = 21$ のとき，与えられた漸化式から，

$$a_2 = 2\left[\frac{21}{2}\right] = 2\times 10 = 20 \qquad a_3 = 3\left[\frac{20}{3}\right] = 3\times 6 = 18$$

$$a_4 = 4\left[\frac{18}{4}\right] = 4\times 4 = 16 \qquad a_5 = 5\left[\frac{16}{5}\right] = 5\times 3 = \mathbf{15}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） **【証明】**

まず，$a_n \geqq 0$ を示す．

（ⅰ） $n = 1$ のとき，$a_1 = p > 0$ より，成り立つ．

（ⅱ） $n = k$ のとき，$a_k \geqq 0$ であると仮定すると，

$$a_{k+1} = (k+1)\left[\frac{a_k}{k+1}\right] \geqq 0$$

となり，$n = k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法により示された． **（証明終）**

次に $a_{n+1} \leqq a_n$ を示す．

【証明】

一般に，

$$\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \leqq \frac{a_n}{n+1}$$

が成り立つので，両辺を $n+1$ 倍して，

$$(n+1)\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \leqq a_n \text{ すなわち } a_{n+1} \leqq a_n$$

よって，示された． **（証明終）**

(3) (2) より，$a_5 = a_1$ となるためには，

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 \text{ すなわち } p = 2\left[\frac{p}{2}\right] = 3\left[\frac{p}{3}\right] = 4\left[\frac{p}{4}\right] = 5\left[\frac{p}{5}\right]$$

が成り立てばよい．よって，

$$\left[\frac{p}{2}\right] = \frac{p}{2},\ \left[\frac{p}{3}\right] = \frac{p}{3},\ \left[\frac{p}{4}\right] = \frac{p}{4},\ \left[\frac{p}{5}\right] = \frac{p}{5}$$

が成り立つので，p は 2, 3, 4, 5 の公倍数となる．ゆえに，求める p の条件は，**p は 60 の倍数**……(答)

(4) **【証明】**

(2) より，$0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ であるから，

$$0 \leqq a_n \leqq a_{n-1} \leqq \cdots\cdots \leqq a_1 = p$$

である．よって，$p < n$ のとき，

$$0 \leqq a_{n-1} < n \iff 0 \leqq \frac{a_{n-1}}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

であるから，$\left[\frac{a_{n-1}}{n}\right] = 0$ となる．ゆえに，$a_n = 0$ が示された．

解説

(1) は，ガウス記号の意味が理解できていれば単なる計算問題です．

(2) は，前半は数学的帰納法で示し，後半はガウス記号の性質を用いて示します．ガウス記号の性質とは次のようなもので，解答ではその一部を利用しました．

参考 **【ガウス記号の性質】**

一般に，実数 x に対して，$[\,x\,]$ が x を超えない最大の整数を表すとき，次式が成り立つ．

(i) $x - 1 < [\,x\,] \leqq x$

(ii) $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,] + 1$

これら 2 式は，同値なので一方をきちんと覚えて，他方は導けるようにしておきましょう．

(3) は，$a_5 = a_1$ となるためには，$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ でなければならないので，これを満たすように p の条件を考えます．ガウス記号が整数を表すという点に着目すれば，p が 2, 3, 4, 5 の倍数でなければならないことがわかります．

(4) は，(2) の結果を利用して，$0 \leqq \frac{a_{n-1}}{n} < 1$ を示します．注意したい点は，$\frac{a_{n-1}}{n} \leqq 1$ のように『イコール』がついてしまうと示せないので，『イコール』がない式を書かなければいけないことです．

次の問いに答えよ．

（1） 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ を求めよ．

（2） 不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2) \leqq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ．

次の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ を求めよ.

(2) 不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2) \leqq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ.

【テーマ】:立体の体積

方針

(1) は置換積分法を利用します.(2) は平面 $z=t$ による切り口の面積を求めて,それを積分することで体積を計算します.

解答

(1)
$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\
&= 1-\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

ここで,$t=\tan\theta$ とおくと,$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ であるから,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \boldsymbol{1-\frac{\pi}{4}}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) 与えられた立体の平面 $z=t$ による切断面の図形は,

$$x^2+y^2+\log(1+t^2) \leqq \log 2 \iff x^2+y^2 \leqq \log 2-\log(1+t^2)$$

より,原点を中心とした半径 $\sqrt{\log 2-\log(1+t^2)}$ の円板となる.ゆえに,その面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=(\log 2-\log(1+t^2))\,\pi$$

である.ただし,$-1 \leqq t \leqq 1$ である.ゆえに,求める立体の体積 V は,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^1 (\log 2-\log(1+t^2))\,dt \\
&= 2\pi\int_0^1 (\log 2-\log(1+t^2))\,dt \\
&= 2\pi\left\{\log 2-\left(\Big[\,t\log(1+t^2)\Big]_0^1-\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt\right)\right\} \\
&= 2\pi\left\{\log 2-\log 2+2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (\because\ (1)) \\
&= \boldsymbol{\pi(4-\pi)}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

解説

(1) は，(2) での計算のヒントなのでミスなくこなしたいところです．

(2) の体積計算ですが，立体を想像するとよくわからなくなることが多いので，平面による切り口を考えます．ここでは，x^2+y^2 という形を一塊とみて考えれば円になりそうだと予想できますから $z=t$ での切り口を考えました．また，t のとり得る範囲ですが，円の半径が 0 以上にならなければならないので，

$$\log 2-\log(1+t^2)\geqq 0 \text{ すなわち } -1\leqq t\leqq 1$$

を得ます．これは，切り口が存在する範囲を表しているので，積分区間になります．

このような問題は，ある程度経験をしておかなければ本番で，すらすら解けないでしょうから，多くの類題を解いておきましょう．

（1） n を自然数とし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(ア) $10^n < \left(\dfrac{5}{2}\right)^m$ を満たす自然数 m に対し，$5n < 2m$ を証明せよ．

(イ) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \dfrac{1}{5000} < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ を満たす n を求めよ．

（2） 実数 x, y が連立不等式

$$4x - 3y \geqq 1, \quad -2x + 6y \geqq 1$$

を満たすとき，$\log_8(4^x + 8^y)$ の最小値を求めよ．

(1)　n を自然数とし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．

(ア)　$10^n<\left(\frac{5}{2}\right)^m$ を満たす自然数 m に対し，$5n<2m$ を証明せよ．

(イ)　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n<\frac{1}{5000}<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ を満たす n を求めよ．

(2)　実数 x, y が連立不等式

$$4x-3y\geqq 1,\quad -2x+6y\geqq 1$$

を満たすとき，$\log_8(4^x+8^y)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：指数不等式と領域の最大最小

方針

(1) は常用対数をとって考えます．(2) は，領域を図示し指数関数の単調増加性を利用して最小値を求めます．

解答

(1)　(ア)　**【証明】**

$10^n<\left(\frac{5}{2}\right)^m$ の両辺に常用対数をとると，

$$\log_{10}10^n<\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^m$$

$$n<\log_{10}\left(\frac{10}{2^2}\right)^m=m(1-2\log_{10}2)$$

よって，

$$\begin{aligned}2m-5n&>2m-5m(1-2\log_{10}2)\\&=m(-3+10\log_{10}2)\\&=m(\log_{10}2^{10}-\log_{10}10^3)\\&=m(\log_{10}1024-\log_{10}1000)>0\end{aligned}$$

ゆえに，示された．　　　　**（証明終）**

(2)　与えられた不等式の各辺に常用対数をとると，

$$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{5000}<\log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$n\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}<\log_{10}\frac{2}{10000}<(n-1)\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots\cdots\ ①$$

ここで，

$$\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\log_{10}3-\log_{10}2=\frac{1}{2}\times 0.4771-0.3010=-0.06245$$

$$\log_{10}\frac{2}{10000}=\log_{10}2-\log_{10}10^4=0.3010-4=-3.699$$

であるから，① 式は次のようになる．

$$-0.06245\times n<-3.699<-0.06245\times(n-1)$$

$$\frac{3.699}{0.06245} < n < \frac{3.76145}{0.06245}$$

$$59.2\cdots < n < 60.2\cdots$$

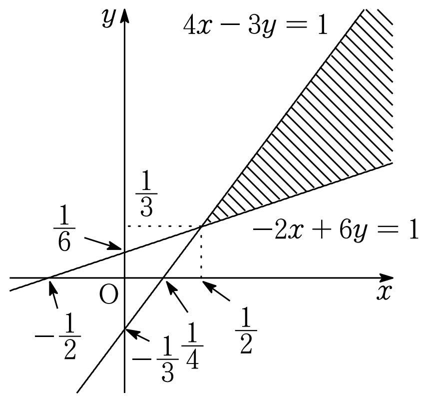
ゆえに，求める n の値は，$\boldsymbol{n = 60}$……(答)

(3)　与えられた連立不等式を満たす領域は，右図斜線部分で境界線上の点を含むところである．

ここで，x を固定して考えると，y が増加するとき，8^y は増加するので，$\log_8(4^x + 8^y)$ の最小値は，$y = \dfrac{1}{3}$ のときであり，$\log_8(4^x + 8^{\frac{1}{3}})$ は x について単調に増加するので，$x = \dfrac{1}{4}$ のとき，最小値をとる．

よって，求める最小値は，

$$\log_8(4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}) = \log_8 4 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\text{……(答)}$$



解説

独立小問の問題なので，特に問題間での関連はありません．

(1) は，常用対数をとり，n を m を用いて表します．不等式の証明の基本は，大きい方から小さい方を引いて正を示すことなので，基本通りに証明を行えばできます．

(2) は，常用対数をとって対数の計算を地道に行います．小数計算があるので，計算間違いに注意しましょう．

(3) は，$\log_8(4^x + 8^y) = k$ とおくと，$y = \log_8(-4x^k + 8^k)$ となり，グラフがかけなくなるため別の方法を考える必要があります．ここでは，2 変数の最大値・最小値を求める際の考え方『1 文字固定』と指数関数の単調増加性を利用して求めます．

$i=\sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 α, β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 自然数 n に対して，

$$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ．

(3) 2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$$

が成り立つことを示せ．

$i=\sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

（1） 実数 α,β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

（2） 自然数 n に対して，

$$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ．

（3） 2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$$

が成り立つことを示せ．

【テーマ】：複素数の計算

方針

(2) では，(1) で示した等式を利用します．(3) では，複素数の相等がポイントとなります．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ &= \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ゆえに，示された．　**（証明終）**

（2） **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi(k+1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(k+1)}{n}\right)\quad(\because\ (1))\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\qquad\cdots\cdots(*)\\ &= z+\left(\cos\frac{2\pi(n+1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

ここで，

$$\cos\frac{2\pi(n+1)}{n}=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi}{n}$$
$$\sin\frac{2\pi(n+1)}{n}=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\sin\frac{2\pi}{n}$$

であるから，

$$(\text{左辺}) = z + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$= z$$

ゆえに，示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（証明終）**

(3) **【証明】**

(2) より，$z\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1\right) = 0$ であり，$n \geqq 2$ より，

$$0 < \frac{2\pi}{n} \leqq \pi$$

であるから，$\cos\frac{2\pi}{n} \neq 1$ である．したがって，

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1 \neq 0$$

となるので，$z = 0$ である．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

であり，$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}$，$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}$ はともに実数，i は虚数単位であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つ．ゆえに，示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（証明終）**

解説

(1) で，$\cos\alpha + i\sin\alpha$ とありますが，これは複素数の表現方法の一つで『極形式』といいます．極形式を用いた計算は非常に便利なことが多いので，大切な表現方法なのです．(1) では，三角関数の加法定理の逆を用いて証明をし，(2) では，(1) を利用した後，z を作るため (*) のような変形を行います．その後 z を作り不要なものを削除したり余ったものを加えたりして調整し，端数の部分が消えることを証明します．(3) では，次の複素数の相等関係を用いて証明をしています．

複素数の相等 … a, b, c, d は実数とする

$$\begin{cases} a + bi = c + di & \text{は } a = c,\ b = d \text{ のときに限り成り立つ.} \\ a + bi = 0 & \text{は } a = b = 0 \text{ のときに限り成り立つ.} \end{cases}$$

大小 2 個のさいころを同時に 5 回投げ，その n 回目 $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ に出た目の数をそれぞれ a_n, b_n とする．$X_1=a_1b_1$, $X_2=X_1+a_2b_2$, $\cdots$, $X_5=X_4+a_5b_5$ と順に定める．X_n が偶数となる確率を p_n とするとき，p_2，p_3，p_4，p_5 を求めよ．

大小 2 個のさいころを同時に 5 回投げ，その n 回目 $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ に出た目の数をそれぞれ $a_n,\ b_n$ とする．$X_1=a_1b_1,\ X_2=X_1+a_2b_2,\ \cdots,\ X_5=X_4+a_5b_5$ と順に定める．X_n が偶数となる確率を p_n とするとき，p_2，p_3，p_4，p_5 を求めよ．

【テーマ】：独立・反復試行の確率

方針

a_nb_n が偶数になる確率と奇数になる確率を求めて考えます．また，漸化式を立式する方法もあります．

♣ ♠

解答

a_nb_n が奇数になるのは，a_n と b_n がともに奇数のときであるから，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

である．よって，a_nb_n が偶数になる確率は，余事象の確率より，

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

である．したがって，$p_1=\dfrac{3}{4}$ となる．

X_2 が偶数となるのは，

（ｉ） X_1 が偶数かつ a_2b_2 が偶数

（ii） X_1 が奇数かつ a_2b_2 が奇数

の 2 通りが考えられるので，

$$p_2=p_1\cdot\frac{3}{4}+(1-p_1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}\cdots\cdots(\text{答})$$

同様にすると，

$$p_3=p_2\cdot\frac{3}{4}+(1-p_2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{32}+\frac{3}{32}=\boldsymbol{\frac{9}{16}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$p_4=p_3\cdot\frac{3}{4}+(1-p_3)\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}+\frac{7}{64}=\boldsymbol{\frac{17}{32}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$p_5=p_4\cdot\frac{3}{4}+(1-p_4)\cdot\frac{1}{4}=\frac{51}{128}+\frac{15}{128}=\boldsymbol{\frac{33}{64}}\cdots\cdots(\text{答})$$

別解

次のように，漸化式を立式して解くこともできます．

$$p_1=\frac{3}{4},\quad p_{n+1}=p_n\cdot\frac{3}{4}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{4}$$

が成り立つので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}\iff p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できる．よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\iff p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}$$

を得る．これを用いて p_2，p_3，p_4，p_5 を求めることができる．

◇ ♡

解説

問題の仕組みは単純なので，完答を目指したい問題です．先に述べた解答で答えた人は，漸化式が立式できることに気付いたでしょうか？単純に同じ作業を繰り返すので，漸化式の存在に気付きたいところです．常に問題が一般化することを想定して解くように心がけましょう．

xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を使って

$$x = t^2, \quad y = e^t + at \quad (t \geqq 0)$$

と書かれている．ただし，e は自然対数の底，a は定数である．C が x 軸に接しているとき，次の問いに答えよ．

（1） a の値を求めよ．

（2） 直線 $\ell : y = 1 - x$ と曲線 C がちょうど 2 点で交わることを示せ．

（3） xy 平面において，直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を使って

$$x = t^2,\quad y = e^t + at \quad (t \geqq 0)$$

と書かれている．ただし，e は自然対数の底，a は定数である．C が x 軸に接しているとき，次の問いに答えよ．

（1） a の値を求めよ．

（2） 直線 $\ell : y = 1 - x$ と曲線 C がちょうど 2 点で交わることを示せ．

（3） xy 平面において，直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

C が x 軸と接するので，$y = 0$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ を満たす t が存在します．

♣ ♠

解答

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = e^t + a$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t + a}{2t}$ である．

曲線 C が x 軸と接しているので，

$$\begin{cases} e^t + at = 0 & \cdots\cdots\ ① \\ \dfrac{e^t + a}{2t} = 0 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

を満たす 0 以上の実数 t が存在する．② より，$a = -e^t$ であるから，① へ代入して，

$$e^t - te^t = 0 \iff e^t(1-t) = 0$$

$e^t \fallingdotseq 0$ より，$t = 1$ を得る．よって，このとき $\boldsymbol{a = -e}$……(答)

(2) **【証明】**

C と ℓ の交点の個数は，

$$x = t^2,\quad y = e^t - et$$

を $y = 1 - x$ へ代入して得られる t についての方程式

$$e^t - et = 1 - t^2 \iff e^t - et + t^2 - 1 = 0$$

を満たす 0 以上の実数 t の個数と一致する．

$f(t) = e^t - et + t^2 - 1$ とおくと，

$$f'(t) = e^t - e + 2t\ ,\quad f''(t) = e^t + 2 > 0$$

よって，$f'(t)$ は単調増加である．

$$f'(0) = 1 - e < 0,\quad f'(1) = 2 > 0$$

であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ で $f'(t) = 0$ となる t がただ 1 つ存在する．その値を $t = \alpha$ とすると，$y = f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	0	↘		↗	0	↗

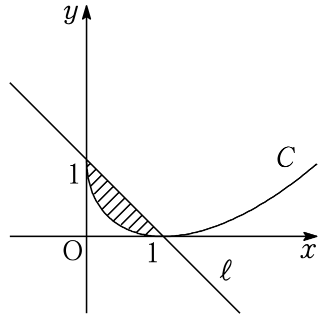
$f(0)=0$，$f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ となる t は，$t=0,\ 1$ の 2 つ存在する．このとき，C と ℓ の交点は，

$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$

であるから，題意は示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（証明終）**

(3)　次図のように $0 \leqq x \leqq 1$ で曲線 C より直線 $y=1-x$ の方が上にあるので，求める面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} - \int_0^1 y\,dx \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^1 (e^t - et)\cdot 2t\,dt \\
&= \frac{1}{2} - 2\int_0^1 te^t\,dt + 2e\int_0^1 t^2\,dt \\
&= \frac{1}{2} - 2\Big[\,te^t - e^t\,\Big]_0^1 + 2e\Big[\,\frac{1}{3}t^3\,\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - 2(e-e+1) + \frac{2}{3}e \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}e - \frac{3}{2}} \cdots\cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}
$$



◇　♡

解説

(1) では，媒介変数の状態で曲線が x 軸に接することを示すので，$\dfrac{dy}{dx}=0$ かつ $y=0$ を同時に満たす t が存在します．

(2) では，2 点で交わることを示すのですが，$x=t^2$ と与えられているので，t が 2 つ存在すればよいことに気付けば方針が立ちます．

(3) では，曲線の概形を正確にかく必要はありません．2 点で交わっていることは (2) で証明済みなので，その区間での直線と曲線の上下関係が分かれば面積を求める式が立式できます．

p は素数，r は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

（1） $x_1, x_2, \cdots, x_r$ についての式 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots{x_r}^{p_r}$ の係数を求めよ．ここで，$p_1, p_2, \cdots, p_r$ は 0 または正の整数で $p_1+p_2+\cdots+p_r=p$ を満たすとする．

（2） $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が正の整数のとき，$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ は p で割り切れることを示せ．

（3） r は p で割り切れないとする．このとき，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れることを示せ．

p は素数，r は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

（1） $x_1, x_2, \cdots, x_r$ についての式 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots{x_r}^{p_r}$ の係数を求めよ．ここで，$p_1, p_2, \cdots, p_r$ は 0 または正の整数で $p_1+p_2+\cdots+p_r=p$ を満たすとする．

（2） $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が正の整数のとき，$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ は p で割り切れることを示せ．

（3） r は p で割り切れないとする．このとき，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れることを示せ．

【テーマ】：整数問題

方針

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ p

♣ ♠

解答

（1） $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ p p
$x_1, x_2, \cdots, x_r$ 1 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$
${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots{x_r}^{p_r}$ x_1 p_1 x_2 p_2 $\cdots$ x_r p^r
p

$$\boldsymbol{\frac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots p_r!}}$$ ……(答)

（2） 【証明】

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ (1)
${x_1}^p, {x_2}^p, \cdots, {x_r}^p$

$$p_k<p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \cdots\cdots ①$$

$$\frac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots p_r!}$$

p ① $p_k!\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ p
p p (証明終)

（3） 【証明】

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ $x_k=1\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ r^p-r
(2) p

$$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$$

r p $r^{p-1}-1$ p (証明終)

♢ ♡

解説

(1)

(2) p $1, 2, \cdots, p-1$ p
$p_k < p$ $p_k!$ p
(3) (2) $x_k = 1$ $r^p - r$

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ $\{x_n\}$

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) n $x_n = a$ a

(2) $a < 1$ $x_n < 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $0 < a < 1$ $x_n < x_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ $\{x_n\}$

$$x_1 = a,\quad x_{n+1} = f(x_n)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) n $x_n = a$ a

(2) $a < 1$ $x_n < 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $0 < a < 1$ $x_n < x_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) (2), (3)

♣ ♠

解答

(1) $x_{n+1} = {x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 3x_n$ n $x_n = a$

$$a = a^3 - 3a^2 + 3a \iff a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$
$$\iff a(a-1)(a-2) = 0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a = 0, 1, 2}$……(答)

(2) 【証明】

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geqq 0$ $f(x)$ …… $(*)$

(i) $n = 1$

$x_1 = a$ $a < 1$ $x_1 < 1$

(ii) $n = k$

$x_k < 1$ $(*)$

$x_{k+1} = f(x_k) < f(1) = 1$

$n = k + 1$

(i), (ii) n $x_n < 1$ 【証明終】

(3) 【証明】

(2) $f(x)$ $x > 0$

$f(x) > f(0) = 0$

…… $(**)$

$0 < a < 1$ $x_n > 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

（i） $n=1$

$x_1 = a > 0$

（ii） $n=k$

$x_k > 0$ (**)

$x_{k+1} = f(x_k) > 0$

$n = k+1$

（i), (ii) n $x_n > 0$

(2) $0 < x_n < 1$

$0 < x < 1$

$$f(x) - x = x^3 - 3x^2 + 3x - x$$

$$= x(x-1)(x-2) > 0$$

$f(x) > x$

$0 < x_n < 1$ $x_n < f(x_n)$ $x_n < x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

【証明終】

◇ ♡

解説

(2) $f(x)$ (3) a $0 < x_1 < 1$ n $0 < x_n < 1$ $x_n < x_{n+1}$

m, n $0 < a < 1$ a $\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$

(1) m, n

(2) $a > \dfrac{2}{3}$

m, n $0 < a < 1$ a $\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$

(1) m, n

(2) $a > \dfrac{2}{3}$

【テーマ】：対数不等式と整数問題

方針

(1) $\log_2 6$ m $n+a$ n (2) $a - \dfrac{2}{3} > 0$

♣ ♠

解答

(1) $\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8$ $2 < \log_2 6 < 3$

$$2 < m + \frac{1}{n+a} < 3$$

n $0 < a < 1$ $0 < \dfrac{1}{n+a} < 1$ $m = 2$

$$\log_2 6 = 2 + \frac{1}{n+a}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+a} &= \log_2 6 - \log_2 4 \\ &= \log_2 \frac{3}{2} \\ n + a &= \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} \\ &= \log_{\frac{3}{2}} 2 \end{aligned}$$

$\log_{\frac{3}{2}} 2$ n a $\dfrac{3}{2}$ 1

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} \iff 1 < \log_{\frac{3}{2}} 2 < 2$$

$n = 1$ $\boldsymbol{m = 2,\ n = 1}$……(答)

(2) 【証明】

(1) $a + 1 = \log_{\frac{3}{2}} 2$

$$\begin{aligned} a - \frac{3}{2} &= \log_{\frac{3}{2}} 2 - \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(3\log_{\frac{3}{2}} 2 - 5\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\log_{\frac{3}{2}} 8 - \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^5\right\} \\ &= \frac{1}{3}\log_{\frac{3}{2}} \frac{8 \cdot 2^5}{3^5} \\ &= \frac{1}{3}\log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}$ 1 $\log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243} > \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

$a > \frac{2}{3}$ （証明終）

◇ ♡

解説

(1) $0 < \frac{1}{n+a} < 1$ $\log_2 6$ m $\frac{1}{n+a}$
$\log_2 6$ m $n + a = \log_{\frac{3}{2}} 2$ n
a m, n

(2) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243}$
1 1

e $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．

（1） $g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ．

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてよい．

（2） $f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ．

e を自然対数の底とする．関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．

（1） $g(x)=(1+e^x)^2 f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$ を求めよ．

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてよい．

（2） $f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ．

【テーマ】：関数の極限と極値

方針

$g(x)$ は $f'(x)$ の分子を表しています．(1) の結果を利用して (2) を示します．

♣ ♠

解答

（1） $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ を x で微分して，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{1-e^{x-1}+e^x-e^{2x-1}-xe^x+e^{2x-1}}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{1-e^{x-1}+(1-x)e^x}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{1-\frac{1}{e}\cdot e^x+(1-x)e^x}{(1+e^x)^2}\\
&= \frac{1+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x}{(1+e^x)^2}
\end{aligned}
$$

よって，$g(x)=1+\left(1-\dfrac{1}{e}-x\right)e^x$ であるから，

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x\right\}=\boldsymbol{-\infty}\cdots\cdots(\text{答})$$

次に，$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to+\infty$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{t\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}+t\right)e^{-t}\right\}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-t}+\frac{t}{e^t}\right\}\\
&= \boldsymbol{1}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

（2） **【証明】**

$g(x)=1+\left(1-\dfrac{1}{e}-x\right)e^x$ であるから，x で微分して，

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -e^x+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x\\
&= -\left(x+\frac{1}{e}\right)e^x
\end{aligned}
$$

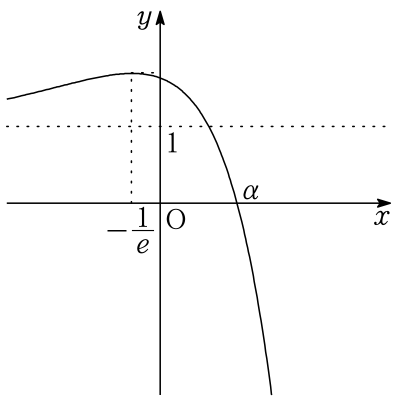
$g'(x)=0$ のとき，$x=-\dfrac{1}{e}$ であるから，増減表は次のようになる．

$$g\left(-\frac{1}{e}\right)=1+\left(1-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)e^{-\frac{1}{e}}$$
$$=1+e^{-\frac{1}{e}}>0$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

よって，$y=g(x)$ は $x>-\dfrac{1}{e}$ で単調減少し，

(1) の結果から，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}=-\infty$ であるから，$g(x)=0$ は $x>-\dfrac{1}{e}$ で，ただ 1 つの実数解をもつ．また，$x\leqq-\dfrac{1}{e}$ で $y=g(x)$ は単調増加で，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$ であるから，$g(x)=0$ は $x\leqq-\dfrac{1}{e}$ で実数解をもたない．



ゆえに，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつので，その実数解を $x=\alpha$ とすると，$f'(x)=0$ を満たす実数解もただ 1 つで，その実数解は $x=\alpha$ である．よって，増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって，増減表より $f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，それが極大値であることが示された．　　　　**（証明終）**

◇　　♡

解説

(1) は，簡単な関数の極限です．$f'(x)$ が求められれば完答しなければならない問題です．(2) は，(1) の結果を用いますが，$f(x)$ が極値をもつためには，$f'(x)=0$ を満たす実数解が存在し，さらに，$f'(x)=0$ となる x の値の前後で $f'(x)$ の符号が変わらなければいけません．そのために，$g(x)$ が用意されています．$g(x)=0$ を満たす x の値は求めることができないので，文字で代用します．そうすることで $f(x)$ に関する増減表が書けるので，ただ 1 つの極大値をもつことが示せます．

n は 2 以上の自然数とし，さいころを n 回振ったときに出る目の数を順に $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ とする．
$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} < a_n$ となる確率を P_n と定めるとき，次の問いに答えよ．

（1） P_2, P_3 を求めよ．

（2） P_6 を求めよ．

（3） $P_n = 0$ となるような n の最小値はなにか．理由をつけて述べよ．

n は 2 以上の自然数とし，さいころを n 回振ったときに出る目の数を順に $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ とする．$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}<a_n$ となる確率を P_n と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) P_2, P_3 を求めよ．

(2) P_6 を求めよ．

(3) $P_n=0$ となるような n の最小値はなにか．理由をつけて述べよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

具体的に書き並べて解答することもできるし，一般的に考えても解答できます．

♣ ♠

解答

(1) $n=2$ のとき，$a_1<a_2$ であればよいので，k を $1 \leqq k \leqq 6$ を満たす自然数とすれば $a_2=k$ に対して a_1 は $k-1$ 通りの場合がある．したがって，求める確率は，

$$P_2=\frac{\sum_{k=1}^{6}(k-1)}{6^2}=\frac{15}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{12}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$n=3$ のとき，$a_1+a_2<a_3$ であればよいので，$a_1+a_2=l$ とおくと，l のとり得る値は $l=2, 3, 4, 5$ である．このとき，$a_1+a_2=l$ に対して a_3 のとり得る値は $6-l$ 通りある．また，(a_1, a_2) の組合せは，

$$(a_1, a_2)=(1, l-1), (2, l-2), \cdots\cdots, (l-1, 1)$$

の $l-1$ 通りがある．したがって，求める確率は，

$$P_3=\frac{\sum_{l=2}^{6}(l-1)(6-l)}{6^3}=\frac{20}{216}=\boldsymbol{\frac{5}{54}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $n=6$ のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_5<a_6$ …… ① であり，

$$a_1+a_2+\cdots+a_5 \geqq 5 \text{ かつ } a_6 \leqq 6$$

であるから，① を満たすものは，

$$a_1+a_2+\cdots+a_5=5 \text{ かつ } a_6=6$$

すなわち，$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)=(1, 1, 1, 1, 1, 6)$ のみである．したがって，求める確率は，

$$P_6=\frac{1}{6^6}=\boldsymbol{\frac{1}{46656}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ とおくと，

$$S_{n-1} \geqq n-1 \text{ かつ } a_n \leqq 6$$

であることから，$S_{n-1}<a_n$ が成り立つための条件は，

$$n-1<6 \iff n<7$$

である．したがって，$P_n=0$ となるための条件は，$n \geqq 7$ であるから，求める n の最小値は，$\boldsymbol{n=7}$……(答)

◇ ♡

解説

(1), (2) は具体的に書き出しても解答できますが，ここでは，応用が利くように一般的に文字を用いて解答しました．(3) は，(2) と同様の考え方で n の最小値を求めています．さいころの問題なので，a_n のとり得る値が 1 ～ 6 までの自然数だけです．比較的絞りやすいでしょうが，カードを取り出す問題などでは，一般的な計算を必要とすることもあるので，発展的な学習もしておきましょう．

三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である．$\mathrm{AB}=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E, F は，
$\mathrm{AE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FB}=1$ をみたし，

$$\angle\mathrm{DAC}=30^\circ,\ \angle\mathrm{DEC}=45^\circ,\ \angle\mathrm{DBC}=60^\circ$$

である．

（1） 辺 CD の長さを求めよ．

（2） $\theta=\angle\mathrm{DFC}$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である．AB = 3 で，辺 AB 上の 2 点 E, F は，AE = EF = FB = 1 をみたし，

$$\angle\mathrm{DAC} = 30^\circ,\ \angle\mathrm{DEC} = 45^\circ,\ \angle\mathrm{DBC} = 60^\circ$$

である．

(1) 辺 CD の長さを求めよ．

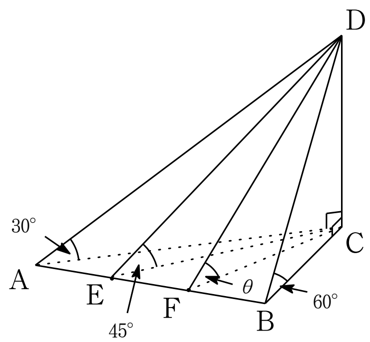
(2) $\theta = \angle\mathrm{DFC}$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

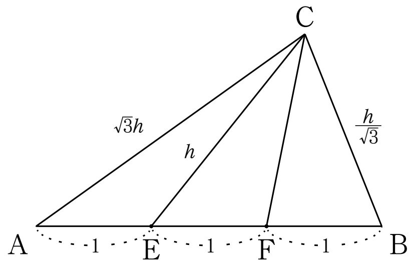
【テーマ】：空間図形の計量

方針

(1) は，高さを h とおけば，底面の辺の長さが h を用いて表せるので，余弦定理を活用します．(2) は，(1) の結果を用いて余弦定理を利用します．中線定理を利用することもできます．

解答





(1) CD $= h$ とおくと，

$$\mathrm{AC} = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$$
$$\mathrm{EC} = h$$
$$\mathrm{BC} = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

ここで，△ABC で余弦定理より，

$$\cos A = \frac{9 + 3h^2 - \frac{1}{3}h^2}{2\cdot 3\cdot \sqrt{3}h} = \frac{8h^2 + 27}{18\sqrt{3}h} \cdots\cdots ①$$

一方，△AEC で余弦定理より，

$$\cos A = \frac{1 + 3h^2 - h^2}{2\cdot 1\cdot \sqrt{3}h} = \frac{2h^2 + 1}{2\sqrt{3}h} \cdots\cdots ②$$

よって，①, ② より，

$$\frac{8h^2 + 27}{18\sqrt{3}h} = \frac{2h^2 + 1}{2\sqrt{3}h} \iff h^2 = \frac{9}{5}$$

$h > 0$ より，$h = \frac{3}{\sqrt{5}}$ である．したがって，**CD** $= \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{5}}}$……**(答)**

(2) $\mathrm{FC} = \frac{\mathrm{CD}}{\tan\theta} \iff \tan\theta = \frac{3}{\sqrt{5}\mathrm{FC}} \cdots\cdots ③$

② より，

$$\cos A = \frac{2\cdot\frac{9}{5} + 1}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{23}{6\sqrt{15}}$$

であるから，△AFC で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{FC}^2 &= 3h^2 + 4 - 2\cdot\sqrt{3}h\cdot 2\cdot\cos A \\ &= 3\cdot\frac{9}{5} + 4 - 4\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

である．FC > 0 より，$\mathrm{FC}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから，③ より，$\tan\theta=3$ を得る．したがって，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{10}$$

題意より，$\cos\theta>0$ となるので，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$……**(答)**

別解

FC は，次のように中線定理を用いても求められます．こちらの方が計算量が減るので，比較的簡単に求まります．

△BCE で中線定理より，

$$\mathrm{CE}^2+\mathrm{CB}^2=2(\mathrm{EF}^2+\mathrm{FC}^2)$$

$$h^2+\frac{1}{3}h^2=2(1+\mathrm{FC}^2)$$

$$\mathrm{FC}^2=\frac{2}{3}h^2-1$$

$$\mathrm{FC}^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}-1=\frac{1}{5}$$

FC > 0 より，$\mathrm{FC}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた角度から，△ABC の辺の長さなどが h を用いて表せるので，空間図形の問題というよりむしろ平面図形の問題に近いです．余弦定理を用いて連立方程式を作って解答します．

(2) は，解説では余弦定理を用いて解答しましたが，FC の長さであれば，別解のように，中線定理を利用して求めることもできます．$\tan\theta$ の値が分かれば $\cos\theta$ の値がわかるので，相互関係の式を用いて $\cos\theta$ を求めましょう．$\cos\theta$ の値ですが，題意から θ は鋭角であることはすぐにわかるので，$\cos\theta>0$ を忘れずに！

s, t を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく．s, t が $s \geqq 0,\ t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

(2)　$x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく．s, t が実数全体を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

s, t を実数とする．以下の問いに答えよ．

（1） $x=s+t+1,\ y=s-t-1$ とおく．s, t が $s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

（2） $x=st+s-t+1,\ y=s+t-1$ とおく．s, t が実数全体を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ．

【テーマ】：不等式を満たす領域

方針

(1) は，s, t を x, y で表し，$s \geqq 0, t \geqq 0$ という条件から領域を図示します．(2) は置き換えを用いて実数条件を利用して領域を図示します．

♣ ♠

解答

(1)

$$\begin{cases} x=s+t+1 & \cdots\cdots \text{①} \\ y=s-t-1 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

①＋② より，

$$x+y=2s \iff s=\frac{1}{2}(x+y)$$

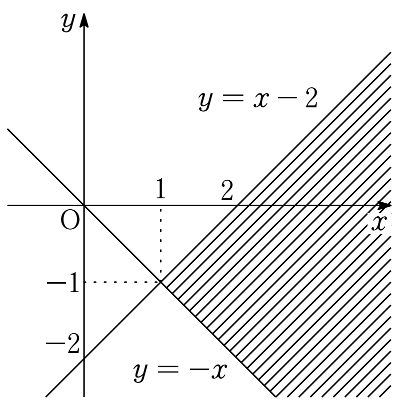
であり，①－② より，

$$x-y=2t+2 \iff t=\frac{1}{2}(x-y-2)$$

である．$s \geqq 0, t \geqq 0$ より，

$$x+y \geqq 0 \text{ かつ } x-y-2 \geqq 0$$

であるから，(x, y) の動く範囲は，右図斜線部分で境界線を含む．



(2)

$$\begin{cases} x=st+s-t+1 & \cdots\cdots \text{③} \\ y=s+t-1 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

③ より，

$$x=(s-1)(t+1)+2$$

④ より，

$$y=(s-1)+(t+1)-1$$

と変形できるので，$u=s-1$，$v=t+1$ とおくと，

$$\begin{cases} x=uv+2 & \iff uv=x-2 \\ y=u+v-1 & \iff u+v=y+1 \end{cases}$$

となり，s, t がすべての実数をとるとき，u, v はすべての実数をとる．したがって，u, v を 2 解にもつ 2 次方

程式は，

$$p^2-(y+1)p+x-2=0$$

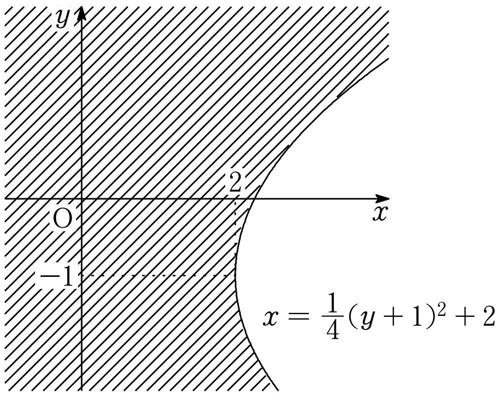
であり，これが実数解をもつことから，判別式を D とすると，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$4x\leqq (y+1)^2+8$$

$$\therefore\quad x\leqq \frac{1}{4}(y+1)^2+2$$

よって，$(x,\,y)$ の動く範囲は，右図斜線部分で境界線を含む.



解説

(1) は，$s,\,t$ に関する連立方程式と考えて $s,\,t$ を $x,\,y$ で表せば，$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ という条件から $(x,\,y)$ の動く領域が求まります.

(2) は，(1) と同様にすることができません．ここでは，$x,\,y$ を $s-1$, $t+1$ で表すことがポイントとなります．解答のように $u,\,v$ を定めれば，$u+v$ と uv が得られます．経験を積んでいればこの先は実数条件で領域が求まることは容易に想像できますが，経験がないと見通しが立たないため難しいでしょう.