P は x 軸上の点で x 座標が正であり，Q は y 軸上の点で y 座標が正である．直線 PQ は原点 O を中心とする半径 1 の円に接している．また，a, b は正の定数とする．P, Q を動かすとき，$a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2$ の最小値を a, b で表せ．

P は x 軸上の点で x 座標が正であり，Q は y 軸上の点で y 座標が正である．直線 PQ は原点 O を中心とする半径 1 の円に接している．また，a, b は正の定数とする．P, Q を動かすとき，$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2$ の最小値を a, b で表せ．

【テーマ】：座標設定の仕方

方針

問題文中に具体的な座標が与えられていないので，自分で設定しないといけません．しかし，その設定の仕方こそがこの問題の大きな鍵となるのです．様々な設定が考えられます．

（ｉ）$\mathrm{R}(s, t)$ とおいて，点 R における接線を求めれば，P, Q の座標が s, t で表せるので，そこから $a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2$ を計算する．ただし，このままでは，2 変数 (s, t) であるため，点 R が円上の点であることを利用して，$s^2+t^2=1$ という式を利用しなければならない．

（ii）（ｉ）では 2 変数になるので，それを避けるため，$\mathrm{R}(\cos\theta, \sin\theta)$ とおき，これを利用して，$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2$ を θ のみの式で表す．

（ｉ）の解法は計算が大変なので，苦労する場合が多いですが，この方法しか知らない受験生も多く，計算量の多さでやられてしまう人が多々います．本問で学習してほしい事柄は，**座標設定を的確に行えば計算量を減らすことができる**ということです．次の**ポイント**を押さえておきましょう．

ポイント

円上の点は θ を用いて表す（θ の範囲も忘れずに！）

座標設定の方法は，みなさんもよく知っている次の公式に由来します．

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

例をいくつか挙げておきましょう．

【例】

(1)　中心 (a, b)，半径 r の円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ のときは，

$$x=r\cos\theta+a\ ,\ \ y=r\sin\theta+b$$

とおきます．$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ が成り立つように，$x-a=r\cos\theta,\ y-b=r\sin\theta$ とおくことで得られます．

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のときは，

$$x=a\cos\theta\ ,\ \ y=b\sin\theta$$

とおきます．楕円は理系の人がメインになりますが，変形の仕方は円のときと同じです．

(3)　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のときは，

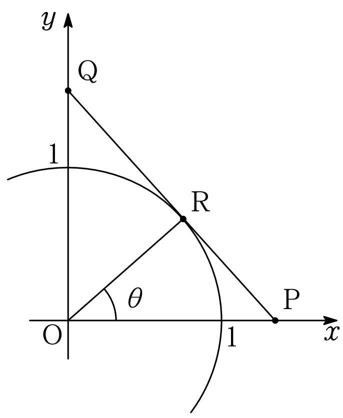
$$x=\frac{a}{\cos\theta}\ ,\ \ y=b\tan\theta$$

とおきます．これは，式を一度 $\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$ と変形して，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いることで得られます．

これらの式変形は，暗記するのではなく自分で考えながら求める練習をしてください．そうしないと，式が少し変わっただけでお手上げになってしまう可能性があります．

♣ ♠

解答



直線 PQ と円の接点を R とする．$\angle \mathrm{ROP} = \theta$ とすると，
$\mathrm{OR} = 1$ より

$$\mathrm{OP} = \frac{1}{\cos\theta},\ \mathrm{OQ} = \frac{1}{\sin\theta} \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2 &= \frac{a}{\cos^2\theta} + \frac{b}{\sin^2\theta} \\ &= a(1+\tan^2\theta) + b\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right) \\ &= a + b + a\tan^2\theta + \frac{b}{\tan^2\theta} \cdots\cdots① \end{aligned}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\tan^2\theta>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$a\tan^2\theta + \frac{b}{\tan^2\theta} \geqq 2\sqrt{a\tan^2\theta \cdot \frac{b}{\tan^2\theta}} = 2\sqrt{ab} \cdots\cdots②$$

等号は，$a\tan^2\theta = \frac{b}{\tan^2\theta}$ すなわち $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$ のとき，成立する．
ゆえに，①, ② より，

$$a\mathrm{OP}^2 + b\mathrm{OQ}^2 \geqq a + b + 2\sqrt{ab}$$

となるので，求める最小値は $\boldsymbol{a+b+2\sqrt{ab}}$……**(答)**　($(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ としても可)

♢ ♡

解説

座標設定ができて θ の式で表すことができれば後は三角関数の問題になります．ただし，θ の範囲を忘れずに！
この問題では，$\tan\theta>0$ となることがポイントですね！逆数が出てくるので，当然…**相加平均・相乗平均の関係**…を用いて最小値を求めます．理系の人は，微分に走らないように！！（数学 Ⅲ の微分が得意な人によくある傾向です．）
文系の人は，最大値・最小値を求める際に分数関数が出てきたらこの『**相加平均・相乗平均の関係**』が使えるかどうかを考える癖をつけておきましょう！頻出です！！

平面上に $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{2}$, $\mathrm{CA}=1$ の直角三角形 ABC がある．点 P が次の等式をみたすとき，点 P はどのような図形上にあるか.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

平面上に $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{2}$, $\mathrm{CA}=1$ の直角三角形 ABC がある．点 P が次の等式をみたすとき，点 P はどのような図形上にあるか．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

【テーマ】：円のベクトル方程式

方針

ベクトルの問題の攻略法は，**始点を揃える**ことです．この問題は，始点を A に揃えるか O に揃えるかの 2 通りを考えることができます．どちらにしてもその後の式変形でやることは同じです．

図形の問題は，いくつかの解決方法があります．次の 3 通りがあることを熟知しておきましょう．

（ｉ） ベクトルを用いる．

（ii） 座標を用いる．

（iii） 平面幾何を用いる．

問題文中にベクトルが用いられていなくてもベクトルを用いることで簡単に解決する問題があるので，図形問題を解く際には上のどの方法で解けばよいのかをよく考えてから解答の方針を立てましょう！

ポイント

ベクトルを用いるときは始点を揃える！

始点を O に揃える場合と A に揃える場合の 2 通りの解答をしてみましょう．

♣　♠

解答

点 A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$$\iff (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{c})+(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

$$\iff |\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{p}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{p}|^2-(\vec{c}+\vec{a})\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left(|\vec{p}|^2-\frac{2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}}{3}\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}{3}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}{3}=0$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}{9}=0$$ ☞ 解説 ❶

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2}{18}=0 \cdots\cdots①$$ ☞ 解説 ❶

ここで，

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2=3,\ \left|\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2=2,\ \left|\vec{c}-\vec{a}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=1$$

であるから，① は次のようになる．

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{1}{3}=0 \iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ ☞ 公式

ゆえに，**点 P は三角形 ABC の重心を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上にある．**……(答)

別解

始点を A に揃えると次のような解答になる．こちらの方が式変形としては若干シンプルになるが，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が簡単に求められるであろうか？

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\\
\iff\ &\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\\
\iff\ &3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\frac{2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{3}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{3}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{3}=0
\end{aligned}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=3,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=1,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1=1$$ ☞ 解説

である．したがって，

$$\begin{aligned}
&3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{3}=0\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{3-1+1}{9}=0\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2=\frac{1}{3}\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ゆえに，**点 P は三角形 ABC の重心を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上にある．**……(答)

◇ ♡

解説

始点を O に揃える方は，式変形が少し難しくなります．始点を A に揃える方は，式変形はそれほど難しくありませんが，内積の値がスムーズに求められるかどうかが鍵となります．それぞれを詳しく解説しておきましょう．

解説❶

解答中の式変形では，次の 2 つの公式を利用して計算している．

$$\begin{cases}(\mathrm{i})\quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ (\mathrm{ii})\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{cases}$$

（ｉ）は展開するだけなので，覚えていなくてもその場で計算すればよいが，（ii）の式変形は必ずマスターしておくこと．これは，次のようにして行う．

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

解説❷

内積の定義をもう一度確認しておこう．

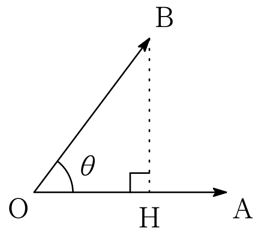
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は，右図のように，点 B から線分 OA に垂線を下ろしその足を H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

で与えられる．したがって，$\angle\mathrm{BOA}=\theta$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$ となるので，内積の定義式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$$

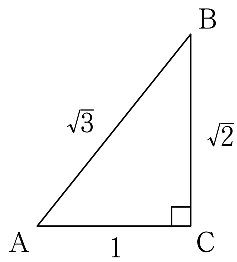
を得る．



つまり，本問のように，三角形が右図のようになっていれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$$

となるので，解答のような計算になる．つまり $\cos\angle\mathrm{CAB}$ を求める必要はない．



実はこの 解説❷ はベクトルの**正射影**と呼ばれるもので受験では非常に大切な計算方法ですから内容をしっかりと理解して使えるようにしておいて下さい．最後に，忘れがちな円のベクトル方程式を復習しておきましょう．

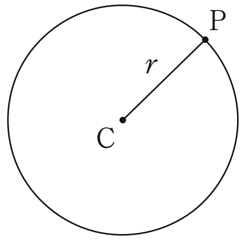
公 式　**円のベクトル方程式**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とし，点 P を円周上の任意の点とする．

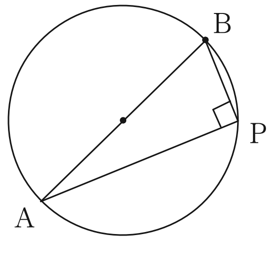
（ｉ）　中心 C，半径 r の円　　$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r,\ (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

（ii）　線分 AB を直径とする円　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

（ｉ）



（ii）



xy 平面上の原点 O に点 P があり，次の規則に基づいて点 P を移動させる．ただし，n は 0 以上の整数とする．

【規則】

① 点 P が $(n, 0)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 1)$, $(n+1, 0)$, $(n+1, -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ の確率で移動する．

② 点 P が $(n, 1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 0)$, $(n+1, 1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

③ 点 P が $(n, -1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 0)$, $(n+1, -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

n 回移動した後の点 P を P_n とするとき，P_{n-1} と P_n の y 座標が初めて等しくなるときの確率を a_n とする．

(1) a_1, a_2, a_3 をそれぞれ求めよ．

(2) a_n を求めよ．

xy 平面上の原点 O に点 P があり，次の規則に基づいて点 P を移動させる．ただし，n は 0 以上の整数とする．

【規則】

① 点 P が $(n, 0)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 1), (n+1, 0), (n+1, -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ の確率で移動する．

② 点 P が $(n, 1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 0), (n+1, 1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

③ 点 P が $(n, -1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1, 0), (n+1, -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ の確率で移動する．

n 回移動した後の点 P を P_n とするとき，P_{n-1} と P_n の y 座標が初めて等しくなるときの確率を a_n とする．

(1) a_1, a_2, a_3 をそれぞれ求めよ．

(2) a_n を求めよ．

【テーマ】：規則性の発見

方針

確率漸化式の問題演習がしっかりとできている人は，問題を読むと一瞬，確率漸化式の問題かな？って思うかもしれませんが，規則性をしっかりと捉えれば確率漸化式を立てることなく解答できることに気づくでしょう！まずは (1) を丁寧に解くことが大切です．

入試問題には，本問のように (1) で $n=1, 2, 3$ の場合を答えさせて，(2) 以降で一般の n について問う場合が多くあります．（みなさんも経験しているはずなのでわかるはずです．）なぜこのような問い方をするかというと，その理由として次の 2 つが挙げられるでしょう．（作問者の気持ちを知ることも問題を解く上では大切なんです！！それを知ることで，解答の方針が見えてくることがあるからです．）

（ｉ） 規則性を見つけさせてその後の問題の指針を与えるため．

（ii） その後の問題でその値が必要になるため．

漸化式を立てるような問題では，（ii）が当てはまるでしょう．本問は，（ｉ）を目的として作問しています．本問で学んでほしいことは，一般の n について問われていることに関してすぐに方針が立たない場合は，**実験して規則を見つける**ことです．これができるようになるだけで随分方針が見えてくる場合があるのです．

ポイント

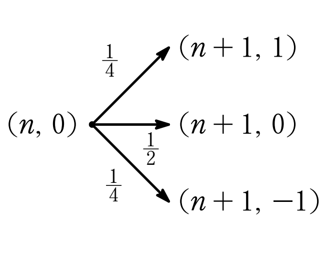
n に関する問題は，実験をして規則性を見つけよう！

もちろんすべてこれで解決するわけではありません．あくまでそのような視点を持っておくことが大切ということです．

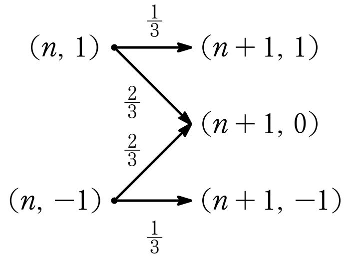
本問攻略のポイントは，じっくりと問題文を読んでその意味をしっかりと理解することです．点の移動を把握するため解答でも書いているようにまずその動きと確率を図にかいてやることです．これをするだけでも随分見通しがよくなるはずです．

解答

【規則 ①】



【規則 ②, ③】



(1)

Ⓐ　a_1 について,

P_0, P_1 の y 座標が等しくなるのは, $P_1(1,\ 0)$ のときであるから,

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

Ⓑ　a_2 について,

P_1, P_2 の y 座標が初めて等しくなるのは, P_1 の y 座標が 1 か -1 のいずれかで, P_2 の y 座標がそれぞれ 1 か -1 のときである. すなわち,

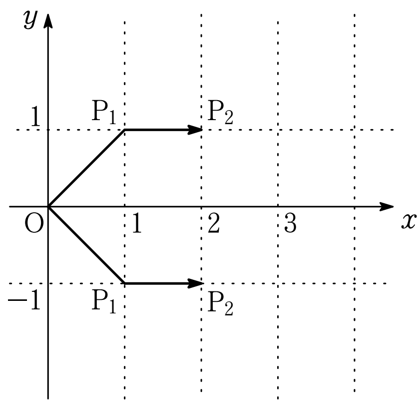
（ｉ）　$P_1(1,\ 1)$, $P_2(2,\ 1)$

（ii）　$P_1(1,\ -1)$, $P_2(2,\ -1)$

のときである.

x 軸に関する対称性から（ｉ),（ii）とも同じ確率になるので, 求める確率は,

$$a_2 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

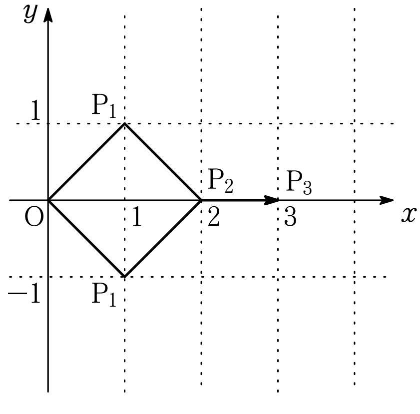


Ⓒ　a_3 について,

P_2, P_3 の y 座標が初めて等しくなるのは, P_1 の y 座標が 1 か -1 のいずれかで, P_2 の y 座標が 0 になり, P_3 の y 座標が 0 となるときであるから,

求める確率は,

$$a_3 = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



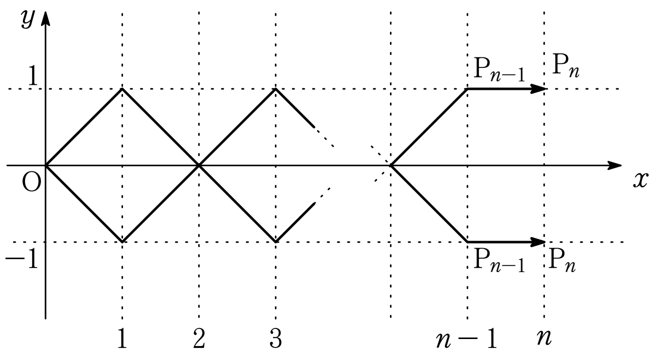
(2)　(1) より, P_{n-1}, P_n の y 座標が初めて等しくなるのは,

（ｉ）　n が偶数のとき, $\begin{cases} P_{n-1}(n-1,\ 1) & , \quad P_n(n,\ 1) \\ P_{n-1}(n-1,\ -1) & , \quad P_n(n,\ -1) \end{cases}$

（ii）　n が奇数のとき, $P_{n-1}(n-1,\ 0)$, $P_n(n,\ 0)$

の 2 通りが考えられる.

（ｉ）のとき，



$$(k,\ 0) \to (k+1,\ 1) \to (k+2,\ 0) \text{ となる確率は，} \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

であり，

$$(k,\ 0) \to (k+1,\ -1) \to (k+2,\ 0) \text{ となる確率も同様に，} \frac{1}{6}$$

となることから，これを $\dfrac{n-2}{2}$ 回 $(n \geqq 4)$ 繰り返した後

$$(n-2,\ 0) \to (n-1,\ 1) \to (n,\ 1) \text{ または，} (n-2,\ 0) \to (n-1,\ -1) \to (n,\ -1)$$

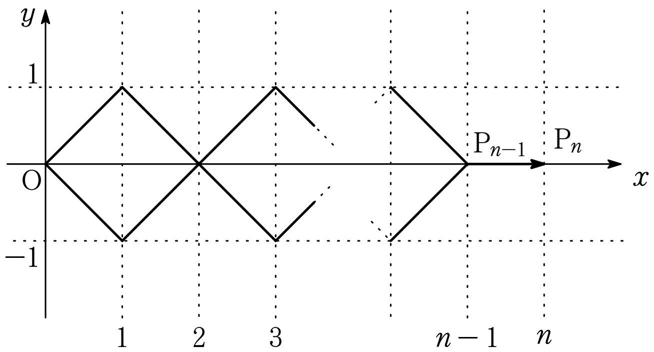
となればよいので，このときの確率は，

$$a_n = \left(\frac{1}{6}\times 2\right)^{\frac{n-2}{2}} \times \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (n \geqq 4)$$

これは $n=2$ のときも成り立つので，n が偶数のとき，

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$$

（ii）のとき，



$$(k,\ 0) \to (k+1,\ 1) \to (k+2,\ 0) \text{ となる確率は，} \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

であり，

$$(k,\ 0) \to (k+1,\ -1) \to (k+2,\ 0) \text{ となる確率も同様に，} \frac{1}{6}$$

となることから，これを $\dfrac{n-1}{2}$ 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後

$$(n-1,\ 0) \to (n,\ 0)$$

となればよいので，このときの確率は，

$$a_n = \left(\frac{1}{6}\times 2\right)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (n \geqq 1)$$

以上より，求める確率は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき，}\ \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}} \\ \boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき，}\ \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

♢　♡

解説

(1) は丁寧に図をかけば容易に解答できるはずです．（これはできなければいけません.）n 回目と $n+1$ 回目の y 座標が同じにならなければいけないので，動きが決まってしまうことに気付けたかどうかが大きな鍵を握ります．それがわかれば，後は正確な場合分けができるかどうかですね！

【問題】

xy 平面上に原点を中心とし半径 1 の円 C がある．C 上に 3 点 A$(1, 0)$，B$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，C$(\cos\beta, \sin\beta)$ をとる．ただし，$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．△ABC は AB = BC の二等辺三角形であるとするとき，次の問いに答えよ．

（1） α，β の関係式を求め，α の取り得る値の範囲を求めよ．

（2） △ABC の面積 S を α を用いて表せ．

（3） S の最大値とそのときの α，β の値を求めよ．

xy 平面上に原点を中心とし半径 1 の円 C がある．C 上に 3 点 A$(1, 0)$，B$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，C$(\cos\beta, \sin\beta)$ をとる．ただし，$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．$\triangle$ABC は AB $=$ BC の二等辺三角形であるとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　α，β の関係式を求め，α の取り得る値の範囲を求めよ．

(2)　$\triangle$ABC の面積 S を α を用いて表せ．

(3)　S の最大値とそのときの α，β の値を求めよ．

【テーマ】：複雑な関数の最大値の求め方

方針

問題文中に具体的な座標が与えられているので，面積公式を知っていれば S を求めるところまではそれほど難問ではない．問題は，S の最大値をどのようにして求めるかである．理系の人で，数学 Ⅲ を学習しているならばいたって標準的な問題であるが，文系の人やまだ数学 Ⅲ を学習していない人には，非常に難しく感じるだろう．解法のポイントは S^2 を計算することにある！

こんな問題に出くわしたことはないだろうか？

問題：$\vec{a}=(0, 2), \vec{b}=(2, t)$ のとき，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ とする．$|\vec{c}|$ の最小値を求めよ．

この問題は，$\vec{c}$ を成分で表してからその大きさを計算すると，

$$\vec{c}=(2, t+2) \text{ より，} |\vec{c}|=\sqrt{2^2+(t+2)^2}=\sqrt{(t+2)^2+4}$$

となるので，$|\vec{c}|^2$ を考えて（または根号内だけに着目して）その最小値は 4 となるので，$|\vec{c}|$ の最小値は 2 である．という具合に計算したはずである．出てきた値の最小値や最大値が求められないときは 2 乗してみるのもひとつの解決策であることを知っておいてください．

ポイント

そのままの形で最大値・最小値が求まらないときは２乗してみよ！

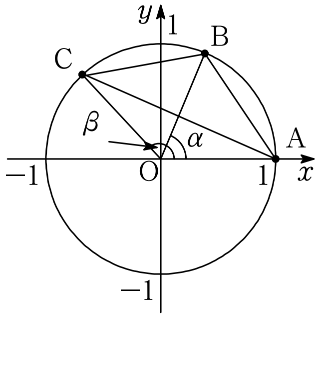
ただし，いつもうまくいくとは限らないので，「あくまでそのような方法があるということを認知しておいてください.」ということです．

解答

(1)　$\triangle$OAB と $\triangle$OBC において，題意より，

$$\text{AB}=\text{BC}\text{，}\text{OA}=\text{OB}=\text{OC}=1$$

であるから，$\triangle\text{OAB}\equiv\triangle\text{OBC}$ である．



ゆえに，$\boldsymbol{\beta=2\alpha}$……(答)

また，$0<\beta<2\pi$ であるから，

$0<2\alpha<2\pi$ より，$\boldsymbol{0<\alpha<\pi}$……(答)

別解

中心角と円周角の関係を使っても解答することができます.
題意から $\triangle$ABC は AB $=$ BC の二等辺三角形であるから, $\angle$BAC $=$ $\angle$BCA である. したがって, 円周角と中心角の関係から $\angle$AOB $=$ $\angle$BOC $= \alpha$ となるので, $\beta = 2\alpha$ となる. (以下, 解答と同じなので略)

(2) 3 点 A, B, C をそれぞれ x 軸方向に -1 平行移動した後の点をそれぞれ A′, B′, C′ とすると,

$$\mathrm{A}'(0,\,0),\ \mathrm{B}'(\cos\alpha-1,\,\sin\alpha),\ \mathrm{C}'(\cos\beta-1,\,\sin\beta)$$

である. よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|(\cos\alpha-1)\cdot\sin\beta-\sin\alpha\cdot(\cos\beta-1)| && ☞\ \boxed{\text{公 式}}\\
&= \frac{1}{2}|(\cos\alpha-1)\cdot\sin 2\alpha-\sin\alpha\cdot(\cos 2\alpha-1)| && (\because\ \beta=2\alpha)\\
&= \frac{1}{2}\sin\alpha|(\cos\alpha-1)\cdot 2\cos\alpha-(2\cos^2\alpha-2)| && (\because\ \sin\alpha>0)\\
&= \sin\alpha(1-\cos\alpha)|\cos\alpha-(\cos\alpha+1)| && (\because\ 1-\cos\alpha>0)\\
&= \boldsymbol{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

別解

ベクトルを利用しても解答することができます.
$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-\cos\alpha,\,-\sin\alpha)$ であるから,

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 = (1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha = 2-2\cos\alpha$$

また, $\angle$AOC $= 2\pi - 2\alpha$ より, $\angle$ABC $= \pi - \alpha$ である. よって,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}\\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\sin(\pi-\alpha) && (\because\ \mathrm{BA}=\mathrm{BC})\\
&= \frac{1}{2}(2-2\cos\alpha)\sin\alpha\\
&= \boldsymbol{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(3) (2) より, $S^2 = \sin^2\alpha(1-\cos\alpha)^2$ となるので, $\cos\alpha = t$ とおくと, $-1<t<1$ で,

$$S^2 = (1-t^2)(1-t)^2 = (1-t^2)(1-2t+t^2) = -t^4+2t^3-2t+1$$

よって, $f(t) = -t^4+2t^3-2t+1$ とおくと,

$$f'(t) = -4t^3+6t^2-2 = -2(t-1)^2(2t+1)$$

$f'(t)=0$ のとき, $-1<t<1$ をみたすものは, $t=-\dfrac{1}{2}$ であるから, 増減表は次のようになる.

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\frac{27}{16}$	↘	

ゆえに, $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき, $f(t)$ は最大値 $\dfrac{27}{16}$ をとるので,

$$t=-\frac{1}{2}\ \text{のとき},\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}\ \text{より},\ \alpha=\frac{2}{3}\pi\ \text{であるから},\ \beta=2\alpha=\frac{4}{3}\pi$$

また，最大値は，$S^2=\dfrac{27}{16}$ であるから，$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ $(\because\ S>0)$

したがって，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{4}{3}\pi}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．……(**答**)

別解

数学 Ⅲ の微分を用いれば計算はもっと容易になる．

(2) より，$S=\sin\alpha(1-\cos\alpha)$ であるから，両辺を α で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\alpha} &= \cos\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin\alpha\\ &= \cos\alpha-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha\\ &= -2\cos^2\alpha+\cos\alpha+1\\ &= -(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dS}{d\alpha}=0$ となるのは，$0<\alpha<\pi$ において，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ すなわち，$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ のときのみで，このときの増減表は次のようになる．

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dS}{d\alpha}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大値	↘	

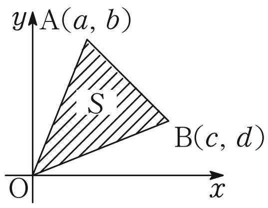
ゆえに，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi}$ **，** $\boldsymbol{\beta=\dfrac{4}{3}\pi}$ のとき，最大値 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ をとる．……(**答**)

◇ ♡

公 式　座標平面上に 3 点 O(0, 0)，A(a, b)，B(c, d) があるとき，△OAB の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}|\,ad-bc\,|$$

で与えられる．



✎：本問のように 3 点のいずれも原点に無い場合は，次のようにベクトルを用いることでこの公式が利用できる．

3 点 A(a, b)，B(c, d)，C(e, f) があるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(e-a,\ f-b),\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(c-a,\ d-b)$$

を考えることで，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|(e-a)(d-b)-(f-b)(c-a)\right|$$

で与えられる．

解説

解答にもいくつか記しましたが，この問題には様々な解き方があります．問題を様々な視点から見て解くことが数学の力を向上させるということを知っておいてください．そして，思いつく限りの別解を考えてみてください．なぜなら，ある問題に対して 2 つの解法（A, B）を知っているとしましょう．問題の設定によっては，解法 A の方が楽に解けるときと，解法 B の方が楽に解けるときがあるからです．そして，場合によっては，解法 A では解けるが解

法 B では事実上解答するのが困難であるという場合もあります．つまり，保険をかけておくという意味でも様々な解法を知っておくことは大切なのです．

さて，本問の (1) については単純な図形の問題なので完答できなければいけません．(2) は公式を知っていれば後は三角関数の計算問題ですね．問題は (3) です．$S = \sin\alpha(1-\cos\alpha)$ の最大値を数学 Ⅲ を用いずに求めるにはどうすればよいでしょうか？このままでは，どうしようもないので 方針 でも述べたように S^2 を計算してみます．すると，S^2 が $\cos\alpha$ だけで表せるようになりますからあとは置き換えをして数学 Ⅱ の微分を用いて最大値を求めることができます．もちろん置き換えをしているので，t の範囲を求めることを忘れてはいけません．

参考

(3) の S の最大値はある程度予想することができます．円に内接する三角形の面積が最大となるのは正三角形となるときであるというのは，大体予想できるはずですから点 A が固定されていることと，(1) での α, β の関係から考えるとちょうど正三角形になるような α があることに気付きます．つまり (3) の計算方法がわからなくても最大値を予想することは可能なのです．しかし，これはあくまで予想！これを答えにしても点はもらえないことは覚悟しておきましょう．

このように答えが予想できる問題はあらかじめ予想しておく癖をつけておくとよいでしょう．なぜならそこから解答の方針が見えてくることがありますし，また出てきた答えが正しいか間違っているかの検討がつくからです．

x についての方程式 $9^x + 2a \cdot 3^x + 2a^2 + a - 6 = 0$ が正の解，負の解を 1 つずつもつとき，定数 a の値のとる範囲を求めよ．

x についての方程式 $9^x + 2a \cdot 3^x + 2a^2 + a - 6 = 0$ が正の解，負の解を 1 つずつもつとき，定数 a の値のとる範囲を求めよ．

【テーマ】：問題文の同値変形

方針

まず $3^x = t$ とおくことに気付くでしょう．そして置き換えした文字の範囲を求めることも基本問題です．あとは正の解と負の解という部分を置き換えした文字に適用するとどのようになるかを考えましょう．

問題文の同値変形とは，与えられた問題が複雑であったり，理解するのが困難であるとき，置き換えなどの手法を用いて問題を簡略化することをいいます．つまり，本問では，与えられた指数関数を $3^x = t$ と置くことによって 2 次関数にすれば，これまで学習してきたことを用いて解答できるじゃないか！という発想で置き換えをするのです．しかし，『置き換えしたら範囲変更！』すなわち新しい変数 t の範囲を求める必要があります．それと同時に問題文にある正の解・負の解というのも言い換えなければいけません．なぜならこの正の解・負の解というのは x の値のことであり t の値ではないからです．実際にこれを解いてもらうと，混乱してここで間違えてしまう人がいるんです．

ポイント

問題の同値変形が問題文を簡略化する

♣　♠

解答 $3^x = t$ とおくと，$t>0$ であり，与えられた方程式を式変形すると，

$$t^2 + 2at + 2a^2 + a - 6 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる．与えられた方程式が正の解，負の解を 1 つずつもつためには，① の 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき，

$$0<\alpha<1<\beta$$

となればよいので，

$$f(t) = t^2 + 2at + 2a^2 + a - 6$$

とおくと，$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ であればよい．

$$f(0)>0 \text{ のとき，}\quad 2a^2 + a - 6>0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2a-3)(a+2)>0$$

$$\therefore \quad a<-2,\ \frac{3}{2}<a \quad \cdots\cdots ②$$

$$f(1)<0 \text{ のとき，}\quad 1 + 2a + 2a^2 + a - 6<0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)(2a+5)<0$$

$$\therefore \quad -\frac{5}{2}<a<1 \quad \cdots\cdots ③$$

ゆえに，②, ③ より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<a<-2} \cdots\cdots \text{(答)}$$

♢　♡

解説

$3^x = t$ とおくとき，x が正ならば $t>1$ で，x が負ならば $0<t<1$ であることがちゃんと理解できているかがポイントです．基本的な同値変形の問題ですから類題が出ても完答できるようにしておきましょう！

a, b を実数とし，$a \geqq 1$ とする．対数不等式

$$\log_2(x+1) + \log_4(a-x) \leqq b \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　x の取り得る値の範囲を a を用いて表せ．

(2)　(1) で求めたすべての実数 x に対して (*) が成り立つための a, b の条件式を求めよ．

(3)　b の最小値を求めよ．

a, b を実数とし，$a \geqq 1$ とする．対数不等式

$$\log_2(x+1)+\log_4(a-x) \leqq b \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ．

（1）　x の取り得る値の範囲を a を用いて表せ．

（2）　(1) で求めたすべての実数 x に対して $(*)$ が成り立つための a, b の条件式を求めよ．

（3）　b の最小値を求めよ．

【テーマ】：条件不等式

方針

対数を含む問題で忘れてはならないのが『底の条件と真数条件』です．次に対数不等式を式変形して 3 次不等式にもっていけばあとは微分で処理できます．

本問で学んでほしいことは (2) のような問題をどのように解釈して解くかということです．対数不等式を式変形していけば 3 次不等式に帰着しますが，そこから題意をみたすためにはどのようになればよいかを述べなくてはいけません．

ポイント

同値変形で３次の条件不等式の問題へ！

ちなみに，『絶対不等式』とは，どんな状況でも成り立つ不等式のことを言います．例として，$x^2-2x+2>0$ や有名な不等式で言うと，相加平均・相乗平均の関係の不等式，コーシー・シュワルツの不等式などがそれにあたります．『条件不等式』とはこの問題のようにある決められた条件のもとで必ず成り立つ不等式のことを言います．本問は (1) で求めた x の値のもとで常に成り立つので条件不等式ということになります．

♣　♠

解答

（1）　真数条件より，

$$x+1>0 \text{ かつ } a-x>0$$

したがって，$\boldsymbol{-1<x<a}$　$(\because\ a \geqq 1)$ ……(答)

（2）　与えられた不等式を変形すると，　☞ 公式

$$\log_4(x+1)^2+\log_4(a-x) \leqq \log_4 4^b \iff \log_4(x+1)^2(a-x) \leqq \log_4 4^b$$

底は 4 で 1 より大きいので，$(x+1)^2(a-x) \leqq 4^b$ である．
ここで，$f(x)=(x+1)^2(a-x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2x+1)(a-x) \\ &= ax^2+2ax+a-x^3-2x^2-x \\ &= -x^3+(a-2)x^2+(2a-1)x+a \\ \therefore\ f'(x) &= -3x^2+2(a-2)x+2a-1 \\ &= (x+1)(-3x+2a-1) \end{aligned}$$

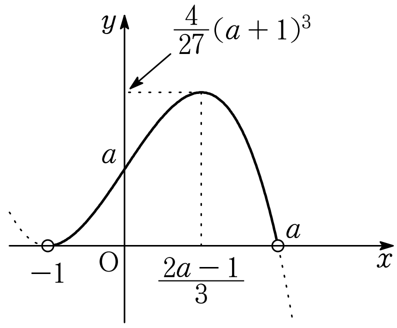
したがって，$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$，$\dfrac{2a-1}{3}$ となる．$a \geqq 1$ であるから，

$$2a \geqq 2 \iff 2a-1 \geqq 1 \iff \frac{2a-1}{3} \geqq \frac{1}{3}$$

であり，$a-\dfrac{2a-1}{3}=\dfrac{a+1}{3}>0$ であることより，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{2a-1}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大値	↘	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2a-1}{3}\right) &= \left(\frac{2a-1}{3}+1\right)^2\left(a-\frac{2a-1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2a+2}{3}\right)^2\left(\frac{a+1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{27}(a+1)^3 \end{aligned}$$
☞ 解説



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．
よって，$-1<x<a$ で常に $f(x) \leqq 4^b$ となるためには，

$$\frac{4}{27}(a+1)^3 \leqq 4^b$$

両辺に底が 4 の対数をとると，

$$\log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3 \leqq \log_4 4^b$$

したがって，$\boldsymbol{b \geqq \log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3}$……(答)

(3)　$y=\log_4 \dfrac{4}{27}(x+1)^3$ は増加関数であるから，$a \geqq 1$ と (2) の結果より，

$$\begin{aligned} b &\geqq \log_4 \frac{4}{27}(a+1)^3 &&\geqq \log_4 \frac{4}{27}(1+1)^3 \\ &= \log_4 \frac{4}{27}\cdot 8 &&= \log_4 2^5 - \log_4 27 \\ &= \log_2 2^{\frac{5}{2}} - \log_4 3^3 &&= \frac{5}{2} - 3\log_4 3 \end{aligned}$$

したがって，b の最小値は，$\boldsymbol{\frac{5}{2}-3\log_4 3}$……(答)

◇　♡

解説

真数条件は，式変形を行う前にすること．

$$\log_4(x+1)^2+\log_4(a-x) \leqq b$$

と式変形した後で真数条件を行うと，$x \neq -1$, $x<a$ となってしまうので，注意したい．

(2) の計算をうまくやる秘訣は，因数分解を巧みに利用することにあります．むやみに展開してはいけません．本問のように文字計算においては当然のことなんですが，数字の計算においてもこの方法をうまく利用することが，計算を速く正確にこなす秘訣になります．

公 式　a, b, c は 1 でない正の数とする.
対数の底を変換する公式として底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

がありますが，毎回これを使っていたのでは非効率的です．そこで，この底の変換公式から導かれる式は公式として覚えておきましょう！

（ｉ）　$\log_a b = \log_{a^n} b^n$（$n$ は実数）

（ii）　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

（iii）　$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

特に，（ｉ）の公式は絶対に使いこなせるようにしておきましょう．対数関数・対数方程式・対数不等式の問題で底を揃えるときにほぼ間違いなく活用できるはずです．

【問題】

不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq ax(y-z)$ がすべての実数 x, y, z に対して成り立つように，実数 a の範囲を定めよ．

不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq ax(y-z)$ がすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して成り立つように，実数 a の範囲を定めよ．

【テーマ】：絶対不等式

方針

絶対不等式の問題です．変数が 3 つもあるので，1 つの文字に着目して後の文字は定数とみなして処理していくのが鉄則です．それを何度か繰り返せば a の値の範囲が決定します．

すべての文字が 2 次なので，1 つの文字についての 2 次不等式と見ることが重要です．それさえ見えてくればあとは 2 次不等式のところで学んだことが生かされるはずです．

ポイント

多変数あるときは１つの文字について着目する！

♣　♠

解答

与式を x の不等式と見なして変形すると，

$$x^2-a(y-z)x+y^2+z^2 \geqq 0$$

これがすべての実数 x に対して成り立つための条件は，
$x^2-a(y-z)x+y^2+z^2=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=a^2(y-z)^2-4(y^2+z^2) \leqq 0$$

となることである．さらに，この不等式を y に関する不等式とみなして変形すると，

$$(4-a^2)y^2+2a^2yz+(4-a^2)z^2 \geqq 0 \cdots\cdots①$$

となるので，これがすべての実数 y に関して成り立つためには，
（ｉ） $a=\pm 2$ のとき，$8yz \geqq 0$ となるので，不適．
（ii） $a \fallingdotseq \pm 2$ のとき，すべての実数 y に対して ① が成り立つための必要十分条件は，
$(4-a^2)y^2+2a^2yz+(4-a^2)z^2=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$D_2/4=a^4z^2-(4-a^2)^2z^2 \leqq 0 \text{ かつ } 4-a^2 \geqq 0$$

である．すなわち，

$$z^2\{a^4-(4-a^2)^2\} \leqq 0 \text{ かつ } -2 \leqq a \leqq 2$$

$$\iff \quad 8z^2(a^2-2) \leqq 0 \text{ かつ } -2 \leqq a \leqq 2$$

これがすべての実数 z に対して成り立てばよいので，

$$a^2-2 \leqq 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}} \cdots\cdots\text{(答)}$$

♢　♡

解説

はじめの処理（x の 2 次不等式が常に成り立つ条件）は基本であるからできなければいけないが，y の 2 次不等式とみるときは 2 次の係数に文字を含むので場合わけが必要になってくる．これを忘れてしまうと大幅に減点されることを覚悟しなくてはいけない．このような文字の処理が正確にできるようになっておかなければ部分点を稼ぐことはできない．日頃から文字に対する警戒心を持つように心がけよう．

$AB = a$, $AC = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$ である $\triangle ABC$ において，辺 AB 上に点 D をとり，AC を 3 : 2 に内分する点を E とする．線分 DE が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき，次の問いに答えよ．

(1)　AD : DB を求めよ．

(2)　直線 DE と直線 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(3)　$AP \perp AC$ となるとき，$\triangle ABP$ の面積を求めよ．

$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AB 上に点 D をとり，AC を 3 : 2 に内分する点を E とする．線分 DE が $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 2 等分するとき，次の問いに答えよ．

(1)　AD : DB を求めよ．

(2)　直線 DE と直線 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(3)　$\mathrm{AP}\perp\mathrm{AC}$ となるとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積を求めよ．

【テーマ】：ベクトルの計算

方針

まずは図をかくこと．(1) は辺の比を $s:(1-s)$ とおいて面積比から s を求める．(2) は，共線条件を利用する．(3) は $\mathrm{AP}\perp\mathrm{AC}$ という条件から a を求めよう．

基本的な公式を一通り確認できるので，欠落しているようなものがあった人は早急に使えるような練習をしておく必要がある．レベル的にはセンター試験と同程度か若干難しいぐらいなので，完答しなくてはいけない問題である．(2) は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す問題であるが，本問を解くには次のポイントを押さえておく必要がある．

ポイント

平面上の任意の点は２つの１次独立なベクトルを用いて１通りに表される

したがって，解答にもあるように $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくことができるのである．自分で設定しなければいけない状況が出てくるので，しっかりとした練習をつんでおく必要がある．

♣　　　　♠

解答

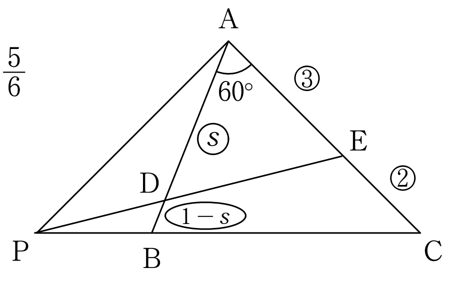
(1)　$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1-s\ (0<s<1)$ とすると，$\mathrm{AD}=as$ である．

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 3\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$$
$$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{2}\cdot as\cdot 3\cdot\frac{3}{5}\cdot\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{20}as$$

$\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{ADE}$ より，

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}a=2\cdot\frac{9\sqrt{3}}{20}as\iff s=\frac{5}{6}$$

よって，**AD : DB = 5 : 1**……(答)



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，　☞ 解説

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\cdot\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\cdot\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

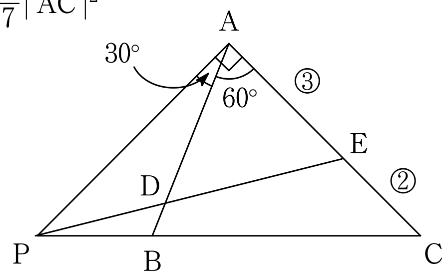
3 点 P, D, E は一直線上にあるので，

$$\frac{6}{5}t+\frac{5}{3}(1-t)=1\iff t=\frac{10}{7}$$

ゆえに，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{10}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$……(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ である．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\frac{10}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{10}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{3}{7}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= \frac{10}{7}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ-\frac{3}{7}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= \frac{10}{7}\cdot a\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\cdot 9 \\
&= \frac{15}{7}a-\frac{27}{7}
\end{aligned}$$



より，$\frac{15}{7}a-\frac{27}{7}=0$ であればよいから，$a=\frac{9}{5}$ である．

したがって，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= \left|\frac{10}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{49}\left(100|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-60\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+9|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\right) \\
&= \frac{1}{49}\left(100\cdot\frac{81}{25}-60\cdot\frac{9}{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 9\right) \\
&= \frac{1}{49}(4\cdot 81-81\cdot 2+81) \\
&= \frac{81}{49}(4-2+1) \\
&= \frac{81}{49}\cdot 3
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|>0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{9}{7}\sqrt{3}$ となるので，

$$\triangle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{140}}\cdots\cdots(\text{答})$$

別解

面積比を利用しても求めることができます．

(2) より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{10}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるので，$\mathrm{PB}:\mathrm{BC}=3:7$ である．

(1) より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{9}{5}=\frac{27\sqrt{3}}{20}$$

であり，△ABC と △ABP は高さが同じであるから，底辺の比が面積比と一致する．ゆえに，

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ABP} = \mathrm{BC} : \mathrm{PB} = 7 : 3$$

となる．したがって，求める面積は，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{7}\cdot\frac{27\sqrt{3}}{20}=\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{140}}\cdots\cdots(\text{答})$$

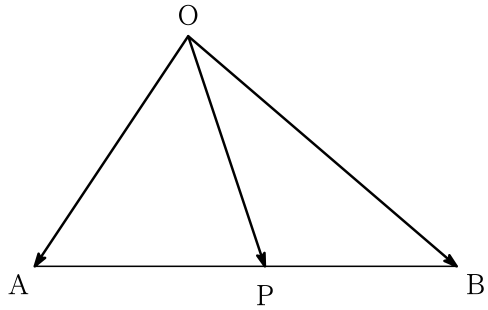
である．

◇ ♡

解説

点 P は直線 BC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおけるが，線分 BC 上にあるわけではないので，$0<t<1$ という条件を付けてはいけません．

【共線条件】



平面上に三角形 OAB があり，点 P は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で表される点であるとする．このとき，
3 点 A, B, P が一直線上にあれば，

$$s + t = 1$$

が成り立つ．
この条件を使うにあたって大切なことは，2 点ある．

$$\begin{cases} (\,\mathrm{i}\,)\ \ \textbf{始点は同じか.} \\ (\,\mathrm{ii}\,)\ \ \textbf{終点は一直線上にあるか.} \end{cases}$$

この 2 点を確認してから用いるようにしよう．本問のように，(ii) がみたされていなくても，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のような条件を用いることで終点を別の点に変更すれば，一直線上に並ぶことがある．

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\, dx$$

このとき，次の各問いに答えよ.

（1） a_1, a_2 を求めよ.

（2） n が奇数のとき，$a_n = 0$ となることを示せ.

（3） n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ.

（4） a_{10} を求めよ.

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\,dx$$

このとき，次の各問いに答えよ．

（1） a_1, a_2 を求めよ．

（2） n が奇数のとき，$a_n = 0$ となることを示せ．

（3） n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ．

（4） a_{10} を求めよ．

【テーマ】：積分漸化式

方針

(1) は単純な計算問題であるから完答すべき問題．(2) は奇関数の性質を用いれば容易に解答できる．(3) は，積分漸化式を求めるという本問の核となる問題．積分漸化式は部分積分で求めることが多い．(4) は (3) を用いて順に計算していけばよい．

積分漸化式を求める問題は多種多様にあるが，よく出てくるものでいえば，次のようなものがあげられます．

（ｉ） $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ ☞ $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$ （ii） $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ ☞ $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$

（iii） $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ ☞ $a_n = \dfrac{1}{n-1} - a_{n-2}$ （iv） $a_n = \displaystyle\int_1^{e} (\log x)^n\,dx$ ☞ $a_n = e - n a_{n-1}$

ちなみに，これらの結果を覚えておいても仕方がありません．なぜなら積分区間が変わると微妙に結果が変わってくるからです．それよりもその導出過程をしっかりと練習しておいてください．（上記の 4 つは自分で計算して確かめて下さい．）中には少々難しい式変形をしなければいけないものもあります．積分漸化式の問題は，大抵が本問のように誘導されていますが，中にはいきなり『 a_{10} を求めよ．』なんて問題もありますから慣れておく必要があるのです．

ポイント

積分漸化式は部分積分法を利用

♣ ♠

解答

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos x\,dx \\ &= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi} \\ &= \mathbf{0} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} dx \\ &= 2\Big[x\Big]_0^{\pi} \\ &= \boldsymbol{2\pi} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) **【証明】**

n が奇数のとき，$f(x) = \sin^n x$ とおくと，

$$f(-x) = \sin^n(-x) = (-\sin x)^n = -\sin^n x = -f(x)$$

となるので，$y = f(x)$ は奇関数であり，同様にすると，$y = \cos^n x$ は偶関数であることが示されるので，

$$a_n = 2\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx$$

となる．ここで，$x - \dfrac{\pi}{2} = t$ とおくと，$dx = dt$ であり，

x	$0 \to \pi$
t	$-\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}$

より，

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)^n\,dt \\ &= -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，題意は示された． **(証明終)……(答)**

(3) n が偶数のとき，$y = \sin^n x + \cos^n x$ は偶関数となるので，

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} (\sin x \sin^{n-1} x + \cos x \cos^{n-1} x)\,dx \\ &= 2\Big[-\cos x \sin^{n-1} x + \sin x \cos^{n-1} x \Big]_0^{\pi} \\ &\qquad -2\int_0^{\pi} \left\{ -(n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x - (n-1)\sin^2 x \cos^{n-2} x \right\} dx \\ &= 2(n-1)\int_0^{\pi} \left\{ (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x + (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x \right\} dx \\ &= 2(n-1)\int_0^{\pi} (\sin^{n-2} x + \cos^{n-2} x)\,dx - 2(n-1)\int_0^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\,dx \\ &= (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n \end{aligned}$$

ゆえに，$na_n = (n-1)a_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}}$……(答)

(4) (1), (3) の結果より

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot a_2 \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi} \text{……(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(2) では，偶関数と奇関数の性質を用いている．積分区間に注意して，いつでもこれが使えるような練習を積んでおきましょう．

【偶関数と奇関数の定積分】

偶関数や奇関数の定積分は積分区間が 0 に関して対称であれば，計算を楽に進めることができるので，絶対に知っておきたい．

$f(x)$ を奇関数，$g(x)$ を偶関数とする．a を正の定数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

この公式は，積分区間の両端の値が**符号が逆で絶対値が等しい**ときでないと使えない．実際に具体的な関数を用いて面積で考えれば，公式の意味が理解できるだろう．

参考

(4) では a_n を求めることまでは問うてないが，実は (3) で求めた漸化式から a_n を求めることができる．式変形がちょっと難しいが，参考までに次のような式変形の仕方も知っておいてもらいたい．

$n=2m$ のとき，(3) で得られた漸化式から，

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\
&= \frac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 4\cdot 3}{\{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 6\cdot 4\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{\dfrac{(2m)!}{2\cdot 1}}{\{2^{m-1}m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}\{m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}(m!)^2}\pi
\end{aligned}$$

となるので，$m=\dfrac{n}{2}$ であることから，

$$a_n = \frac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi$$

ゆえに，これと (2) の結果から，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n\ \text{が奇数のとき，}\quad a_n = 0} \\ \boldsymbol{n\ \text{が偶数のとき，}\quad a_n = \dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となるのである．これを用いても (4) は解答することができる．

$$a_{10} = \frac{10!}{2^8\cdot(5!)^2}\pi = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^8\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\pi = \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) + 1 + \int_{-x}^x f(t)\,dt$$

（1） $f(0),\ f'(0)$ の値を求めよ．

（2） $a,\ b$ を実数とし，$f(x)$ が $f(x) = e^x(a\sin x + b\cos x)$ の形で与えられるとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

（3） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$ を示せ．

（4） $f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ \ y \geqq -1\ ,\ \ y \leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x)+1+\int_{-x}^x f(t)\,dt$$

(1)　$f(0)$, $f'(0)$ の値を求めよ．

(2)　a, b を実数とし，$f(x)$ が $f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$ の形で与えられるとき，a, b の値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx+1$ を示せ．

(4)　$f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ y \geqq -1\ ,\ y \leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

【テーマ】：積分方程式

方針

(1) は関数方程式などでもよく出題される問題で，$x=0$ を与式に代入すればよい．(2) は関数方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める問題で，(1) を用いればよい．(3) は部分積分を用いる．(4) は (3) をどのように活かすかがポイントである．

(2) は $f(x)$ を与式に代入すると計算が非常に大変になります．未知数が 2 つあるので式が 2 つ必要であるということに気がつけば (1) が使えるのでは？と思いつくでしょう！ (3) は (4) の計算を和らげるための誘導問題です．$e^x\sin x$ や $e^x\cos x$ は部分積分を何度か繰り返せば同じ形が出てくるというのは常識として知っておきましょう．(3) のおかげで (4) の計算はそれほど難解にはなりません．誘導がなくても自分で気付けるようにしておきたいものです．

ポイント

積分方程式は適切な値を代入！

♣　♠

解答

(1)　与えられた式に $x=0$ を代入すると，

$$\int_0^0 f(t)\,dt = f(0)+1+\int_0^0 f(t)\,dt \quad \therefore\ \boldsymbol{f(0)=-1}\cdots\cdots(\text{答})$$

次に，与えられた式の両辺を x で微分すると，　☞ 公式

$$f(x)=f'(x)+f(x)-f(-x)\cdot(-1) \iff f'(x)=-f(-x)$$

この式に，$x=0$ を代入して，

$$f'(0)=-f(0)=1 \quad \therefore\ \boldsymbol{f'(0)=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$f'(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)+e^x(a\cos x-b\sin x)=e^x\{(a-b)\sin x+(a+b)\cos x\}$$

であり，

$$f(0)=b,\ f'(0)=a+b$$

であるから，(1) の結果より，

$$\begin{cases} b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{a=2} \\ \boldsymbol{b=-1} \end{cases} \cdots\cdots(答)$$

(3) **【証明】**

部分積分法で計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx &= \Big[e^x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1\end{aligned}$$

よって，示された． (証明終)……(答)

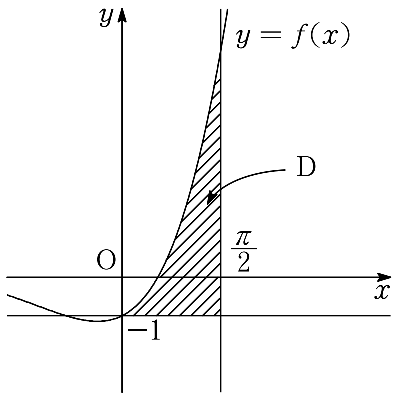
(4) (2) より，

$$f(x)=e^x(2\sin x-\cos x),\ f'(x)=e^x(3\sin x+\cos x)$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)>0$ となるので，$y=f(x)$ はこの区間で単調増加である．

よって，領域 D を図示すると図の斜線部分（境界線上の点を含む）となる．したがって，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)-(-1)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{e^x(2\sin x-\cos x)+1\}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 2 + \frac{\pi}{2} \quad (\because\ (3)) \end{aligned}$$



で表される．ここで，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned} I &= \Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx \\ &= -1 + \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \end{aligned}$$

したがって，

$$2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \iff I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$$

ゆえに，求める面積 S は，

$$S = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2} + 2 + \frac{\pi}{2} \iff \boldsymbol{S = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+\pi+3}{2}} \cdots\cdots(答)$$

◇ ♡

公 式 **【微分と積分の関係】**

a を定数．x は t に無関係な変数．$f(x)$, $g(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

（i） $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

（ii） $$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

解説

(4) での計算は基本的な面積計算ですが，その計算途中に $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ と $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$ が出てきます．もちろんそれぞれの積分計算はやったことがあるはずですが，それを一つ一つ計算しているのでは大変です．ですから (3) の設問を設けました．このような関係式は結果を覚えておく必要は無いですが，この 2 つの積分には何らかの関係があるということを経験的に知って置いてもらいたいのです．このような関係は日頃の計算演習を通して学んでいくしかありませんから，そのような意識を持ちつつ学習を進めてください．

多項式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余り，x^2+1 で割ると 1 余る．$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

多項式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余り，x^2+1 で割ると 1 余る．$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【テーマ】：整式の除法

方針

よく見かける余りの問題とは少し様子が違うことに気付いただろうか？基本的なやり方はこれまでと同様にすればいいのですが，$x^2+x+1=0$ や $x^2+1=0$ の解が計算しやすい形や実数でないというところをどのように生かすかがポイントです．

この問題を解く前に，次の基本問題が攻略できていなければいけません．

例題　多項式 $f(x)$ を $x+1$ で割ると 3 余り，x^2-4 で割ると $x+1$ 余る．$f(x)$ を $(x+1)(x^2-4)$ で割ったときの余りを求めよ．

解答

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)Q_1(x)+3 \\ f(x)=(x^2-4)Q_2(x)+x+1 \end{cases}$$

とかけるので，$f(-1)=3$，$f(2)=3$，$f(-2)=-1$ である．

$$f(x)=(x+1)(x^2-4)Q_3(x)+ax^2+bx+c$$

より，

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=3 \\ f(2)=4a+2b+c=3 \\ f(-2)=4a-2b+c=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=5 \end{cases}$$

よって，求める余りは，$\boldsymbol{-x^2+x+5}$……(答)

本問を解くためのベースになる問題ですから，必ず理解しておかなければいけません．この問題には，余りを工夫して設定する**別解**もありますから自分で調べておくとよいでしょう．

ポイント

割る整式の値が 0 となる $y=x$ の値を代入する
与えられた条件から求める余りの形を工夫する

♣　♠

解答

$f(x)$ を x^2+x+1, x^2+1 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とすると，

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+x+2 & \cdots\cdots① \\ f(x)=(x^2+1)Q_2(x)+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

と表すことができる．次に，$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $R(x)$ とおくと，$R(x)$ は 3 次以下の整式であり，

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+1)Q_3(x)+R(x)\ \cdots\cdots③$$

と表すことができる．ここで，①, ③ から $R(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $x+2$ に等しいので，

$$R(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+x+2=ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+2 \cdots\cdots ④$$

となる．同様にすると，②, ③ から

$$R(x)=(x^2+1)(ax+c)+1=ax^3+cx^2+ax+c+1 \cdots\cdots ⑤$$

と表すことができる．④, ⑤ より，

$$\begin{cases} a+b=c \\ a+b+1=a \\ b+2=c+1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

であるから，求める余りは ⑤ より，$\boldsymbol{R(x)=x^3+x+1}$……(答)

別解

$f(x)$ を x^2+x+1, x^2+1 で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とすると，

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+x+2 & \cdots\cdots ① \\ f(x)=(x^2+1)Q_2(x)+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

と表すことができる．ここで，$x^2+x+1=0$ の 1 つの解を ω とすると，もう 1 つの解は ω^2 と表すことができて，さらに $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$ をみたす．これを用いると ① より，

$$f(\omega)=\omega+2\ ,\ f(\omega^2)=\omega^2+2=-\omega+1 \cdots\cdots ③$$

を得る．また，② に $x=i, -i$ (i は虚数単位) をそれぞれ代入すると，

$$f(i)=1\ ,\ f(-i)=1 \cdots\cdots ④$$

を得る．

ここで，$f(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2+1)$ で割った商を $Q_3(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とおくと，

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+1)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$$

と表される．$\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$, $i^2=-1$ を用いると，

$$\begin{cases} f(\omega)=a\omega^3+b\omega^2+c\omega+d=(c-b)\omega+a-b+d \\ f(\omega^2)=a\omega^6+b\omega^4+c\omega^2+d=(b-c)\omega+a-c+d \\ f(i)=ai^3+bi^2+ci+d=(c-a)i-b+d \\ f(-i)=a(-i)^3+b(-i)^2+c(-i)+d=(a-c)i-b+d \end{cases}$$

これらと ③, ④ から

$$(*)\begin{cases} (c-b)\omega+a-b+d=\omega+2 \\ (b-c)\omega+a-c+d=-\omega+1 \\ (c-a)i-b+d=1 \\ (a-c)i-b+d=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

以上より，求める余りは，$\boldsymbol{R(x)=x^3+x+1}$……(答)

◇ ♡

解説

解答 は余りを工夫して設定する方針をとっていて，**別解** は割る整式の値が 0 となるような x の値を利用する方針です．**別解** の方は，ω に関する知識がなければ思いつくことは困難でしょう！ 1 の虚立方根 ω に関する基礎知識をまとめておくので，知らなかった人，忘れていた人はもう一度復習しましょう．

参考

【1の虚立方根】

方程式 $x^3 = 1$ は，実数解を 1 つと複素数解を 2 つもつ．その複素数解を**1の虚立方根**といい，その 1 つを $\boldsymbol{\omega}$（オメガ）とする．（どちらを ω とおいても構わない．）実際にその解を求めると，

$$\begin{aligned} x^3 = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots\cdots① \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

すなわち，

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と置いてもいいし，$\omega = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ と置いても構わない．

【ωの性質】

なぜどちらを ω と置いてもいいのか？それは次のような性質があるからである．

1の虚立方根の1つを $\boldsymbol{\omega}$ とおくとき，もう一方の虚立方根は $\boldsymbol{\omega^2}$ である．

すなわち，1 の 3 乗根は，次の 3 つで表される．

1の3乗根

$$\mathbf{1}\ ,\ \boldsymbol{\omega}\ ,\ \boldsymbol{\omega^2}$$

さらに，ω には次の重要な関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\omega^3 = 1\ ,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0}$$

上記の式がなぜ成り立つのか？それは，ω は ① の解だからです．
複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とすれば，次の式も成り立つことがわかります．

$$\boldsymbol{\omega^2 = \overline{\omega}\ ,\ \overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0}$$

ω に関する基本事項は，ここに挙げているもので全てなので，ここにある式をしっかりと覚えて活用できるようにしておきましょう．

また，**別解** の (*) の部分は，次の事実を利用しています．

a, b, c, d が実数，z が複素数であるとき，$az+b = cz+d \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, b = d$

このように，入試問題は様々な分野の知識が必要となりますから，万遍なく学習することが必要です．

【問題】

a を実数とするとき，対数方程式 $\log_2(x-1)^2+\log_{\sqrt{2}}x=2a$ の実数解の個数を求めよ．

a を実数とするとき，対数方程式 $\log_2(x-1)^2+\log_{\sqrt{2}}x=2a$ の実数解の個数を求めよ.

【テーマ】：対数方程式の実数解の個数

方針

まずは真数条件でしょう．次に対数の底を揃えて式を簡単な形に変形します．ただし，式変形に要注意！あとは，グラフの交点が実数解の個数と等しいということを用いればよいですね.

なにげなくやってしまいがちな式変形ですが，次の式変形は間違っています.

$$\log x^2=2\log x$$

なにが違うのかわかりますか？では左辺と右辺で別々に真数条件を考えてみましょう！

$$\text{左辺の真数条件：}\quad x^2>0 \iff x\neq 0$$
$$\text{右辺の真数条件：}\quad x>0$$

左辺と右辺で真数条件が異なってしまいます．それにもかかわらず式が等しいって変ですよね？本問の落とし穴はここにあります．次のように変形するのが正確な式変形です.

$$\log x^2=2\log|x|$$

そうです！絶対値がつくんです！今までなにげなく式変形していたものもよく考えなければこのような落とし穴にはまってしまいますので，十分に注意してください.

ポイント

$$\log x^2=2\log|\boldsymbol{x}|$$

♣ ♠

解答

真数条件より，

$$(x-1)^2>0 \text{ かつ } x>0 \iff x\neq 1,\ x>0 \cdots\cdots①$$

与えられた方程式を変形すると，

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)^2+\log_2 x^2=2a &\iff \log_2|x-1|+\log_2 x=a\\ &\iff \log_2 x|x-1|=\log_2 2^a\\ &\iff x|x-1|=2^a\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=x|x-1|$ とおくと，$y=f(x)$ と $y=2^a$ の交点の個数を調べればよい.

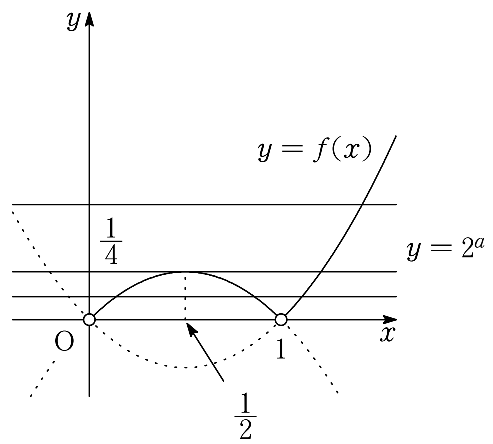
$$\begin{cases} f(x)=-x(x-1) & (0<x<1)\\ f(x)=x(x-1) & (x>1)\end{cases}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる.

（ｉ） $2^a > \frac{1}{4}$ すなわち $a > -2$ のとき，
　交点は 1 個であるから，実数解の個数は 1 個.

（ii） $2^a = \frac{1}{4}$ すなわち $a = -2$ のとき，
　交点は 2 個であるから，実数解の個数は 2 個.

（iii） $2^a < \frac{1}{4}$ すなわち $a < -2$ のとき，
　交点は 3 個であるから，実数解の個数は 3 個.



ゆえに，求める実数解の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > -2} \text{ のとき，} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = -2} \text{ のとき，} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a < -2} \text{ のとき，} & \textbf{3 個} \end{cases} \cdots\cdots\text{(答)}$$

◇　♡

解説

対数方程式を式変形して，2 次方程式の実数解の個数問題に帰着させる典型的な問題ですが，前述の通り式変形に落とし穴があります．多くの人が絶対値を忘れて崩壊しているのではないでしょうか？対数関数や対数方程式を式変形する上で非常に使える公式がありますので，紹介しておきます．知らなかった人は必ずマスターしておきましょう！

公 式　**底の変換**

みなさんがよく知っている底の変換公式は，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c \neq 1)$$

ですよね？これを毎回使っていたのでは式変形をするのに時間と手間がかかってしまいます．そこで次の公式を挙げておきます．　$a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ b \neq 1,\ c>0$ とし，p を実数とする.

（ｉ）　$\log_a b = \log_{a^p} b^p$　　（ii）　$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$　　（iii）　$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

特に（ｉ）は式変形で重宝すること間違いありません．本問でも式変形の際に利用しています．簡単な例を挙げておきます.

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \log_{(\sqrt{2})^2} 3^2 = \log_2 3^2 \quad (p = 2 \text{ として計算しています.})$$

つまり，底を p 乗したら真数も p 乗すればよいのです．センター試験にしても，2 次試験にしても大抵この公式を用いれば底は揃えられます．ただし，にわか仕込みでは失敗する人も多いので，十分な練習を積んでおいてください.

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\max\left\{e^{-2x}\ ,\ \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right\}\ とする.$$

ただし，$\max\{a, b\}$ は，$a<b$ のとき b ，$a \geqq b$ のとき a を表すものとする.

（1） $y=f(x)$ のグラフを図示せよ.

（2） $y=f(x)$ と 3 直線 $x=-\log 2$ ，$x=\log 2$ ，x 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\max\left\{e^{-2x}\ ,\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right\}\ とする.$$

ただし，$\max\{a, b\}$ は，$a<b$ のとき b，$a \geqq b$ のとき a を表すものとする.

（1） $y=f(x)$ のグラフを図示せよ.

（2） $y=f(x)$ と 3 直線 $x=-\log 2$，$x=\log 2$，x 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

【テーマ】：回転体の体積

方針

$\max\{a, b\}$ は小さくない方（大きい方と等しいとき）の値をとることに注意して，関数を決定しよう．$x=0$ を境に関数が変わるということに気付けたかどうかがポイントになる．それを元にグラフをかこう．(2) は回転体がどのような図形になるかを想像して体積を求める式を立式する.

$\max\{a, b\}$ は受験ではちょくちょく見かける記号ですが，教科書には登場しません．このように教科書には載っていない記号を用いるときは，必ずその記号の説明が問題文中に書かれています．しかし，それをその場で理解して解答するのは意外に難しい場合が少なくありません．（記号を誤解して解釈してしまえば全滅は避けられませんから…）つまり，できるだけ受験で取り上げられる記号は知っておく必要があるのです．知っている人と知らない人では当然本番で差がついてしまいます．知っている記号が出たとしても問題文をきちんと読んで，自分の知っている定義とちゃんと合致しているかどうかを確認するようにしてください．（思い込みは最大の敵です.）

さて，体積計算ですがみなさんよく π をかけるのを忘れますので，十分注意してください．また，回転体の体積は，x 軸回転，y 軸回転が頻出です．どの変数で積分したらいいかわからなくなったという話をよくききます．次のことを押さえておきましょう.

ポイント

回転体の体積の計算は，回転軸の変数で積分する

もちろん，回転軸がそれ以外の問題もありますが，それはまた追々扱っていきます.

♣ ♠

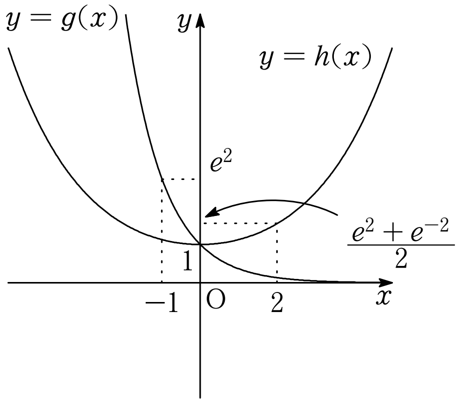
解答

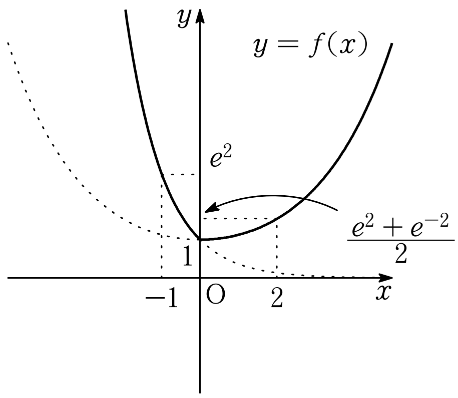
(1) $g(x)=e^{-2x}$，$h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと，$h'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

であるから，$h'(x)=0$ のとき，$e^x=e^{-x}$ より，$x=0$ である．よって，増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

したがって，$g(x)$，$h(x)$ のグラフは下図のようになるから $y=f(x)$ は右下図のようになる．……(答)





(2)

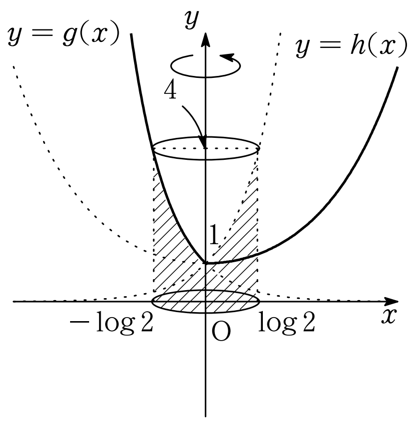
$$f(x)=\begin{cases} e^{-2x} & (x<0) \\ \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

であるから，

$$f(-\log 2)=e^{2\log 2}=e^{\log 4}=4$$

$$f(\log 2)=\frac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

よって，$y=f(x)$ を y 軸のまわりに一回転してできる回転体は右図のようになる．



ゆえに，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= \pi\cdot(\log 2)^2\cdot 4-\pi\int_1^4 x^2\,dy \\
&= 4\pi(\log 2)^2-\pi\int_1^4\left(-\frac{\log y}{2}\right)^2 dy \\
&= 4\pi(\log 2)^2-\frac{\pi}{4}\int_1^4(\log y)^2\,dy \\
&= 4\pi(\log 2)^2-\frac{\pi}{4}\left(\Big[\,y(\log y)^2\,\Big]_1^4-\int_1^4 y\cdot 2(\log y)\cdot\frac{1}{y}\,dy\right) \\
&= 4\pi(\log 2)^2-\frac{\pi}{4}\left(4(\log 4)^2-2\int_1^4\log y\,dy\right) \\
&= 4\pi(\log 2)^2-\pi(\log 4)^2+\frac{\pi}{2}\left(\Big[\,y\log y-y\,\Big]_1^4\right) \\
&= 4\pi(\log 2)^2-4\pi(\log 2)^2+\frac{\pi}{2}(4\log 4-4+1) \\
&= \frac{\pi}{2}(4\log 4-3) \\
&= \boldsymbol{4\pi\log 2-\frac{3}{2}\pi}\text{……(答)}
\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

記号の意味をしっかりと捉えることができれば (1) は基本的なグラフをかく問題でしょう．(2) は y 軸回転の回転体の体積を求めるので y で積分します．その際に積分区間と被積分関数が何になるかに十分注意しましょう．

3 つのポール A, B, C があり，いまポール A にすべて半径の異なっている n 枚の円盤が半径の大きいものから順にささっている．この円盤を次の規則に従って移動させ，最終的に B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させる．

$$\begin{cases} \textbf{規則 1} & \text{：　小さい円盤の上に大きい円盤をのせることはできない.} \\ \textbf{規則 2} & \text{：　1 回の移動では 1 枚の円盤しか動かすことはできない.} \\ \textbf{規則 3} & \text{：　移動の際は A, B, C の 3 つのポールすべてを使用してよい.} \end{cases}$$

このとき，n 枚の円盤すべてを B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させるためには最低何回円盤を移動させないといけないかを n の式で表せ.

3 つのポール A, B, C があり，いまポール A にすべて半径の異なっている n 枚の円盤が半径の大きいものから順にささっている．この円盤を次の規則に従って移動させ，最終的に B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させる．

- **規則 1** ： 小さい円盤の上に大きい円盤をのせることはできない．
- **規則 2** ： 1 回の移動では 1 枚の円盤しか動かすことはできない．
- **規則 3** ： 移動の際は A, B, C の 3 つのポールすべてを使用してよい．

このとき，n 枚の円盤すべてを B, C のどちらかにいまと同じような状態になるように移動させるためには最低何回円盤を移動させないといけないかを n の式で表せ．

【テーマ】：隣接 2 項間漸化式

方針

① n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおいて，数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式を立式する．
② n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおいて，$n = 1, 2, 3$ から a_n を類推しそれを数学的帰納法で証明する．

この問題は，『ハノイの塔』と呼ばれる有名な問題です．解き方は 方針 でも示したように，漸化式を立式するか類推して数学的帰納法で証明するかの 2 通りが考えられるでしょう．

ポイント

n 回目の状況を知るためには漸化式を立式すると簡単に求まることがある

問題文から漸化式を立式すれば簡単だ！と気付くには経験が必要です．「こういう問題には漸化式」というほど単純ではありません．経験を積むことで問題を読んだときに漸化式を立式すればよいということに次第に気付けるようになるでしょう．

♣ ♠

解答

n 枚のときに移動させた最低回数を a_n とおく．
$n = 1$ のとき，1 回の移動で条件をみたすので，$a_1 = 1$ である．
$n+1$ 枚のとき，まずこれら $n+1$ 枚の円盤が A にささっているとしても一般性を失わない．上の n 枚を a_n 回でポール B に移動し，次に $n+1$ 枚目の円盤をポール C に移動し，最後にポール B にささっている n 枚をポール C へ移動すればよい．よって，

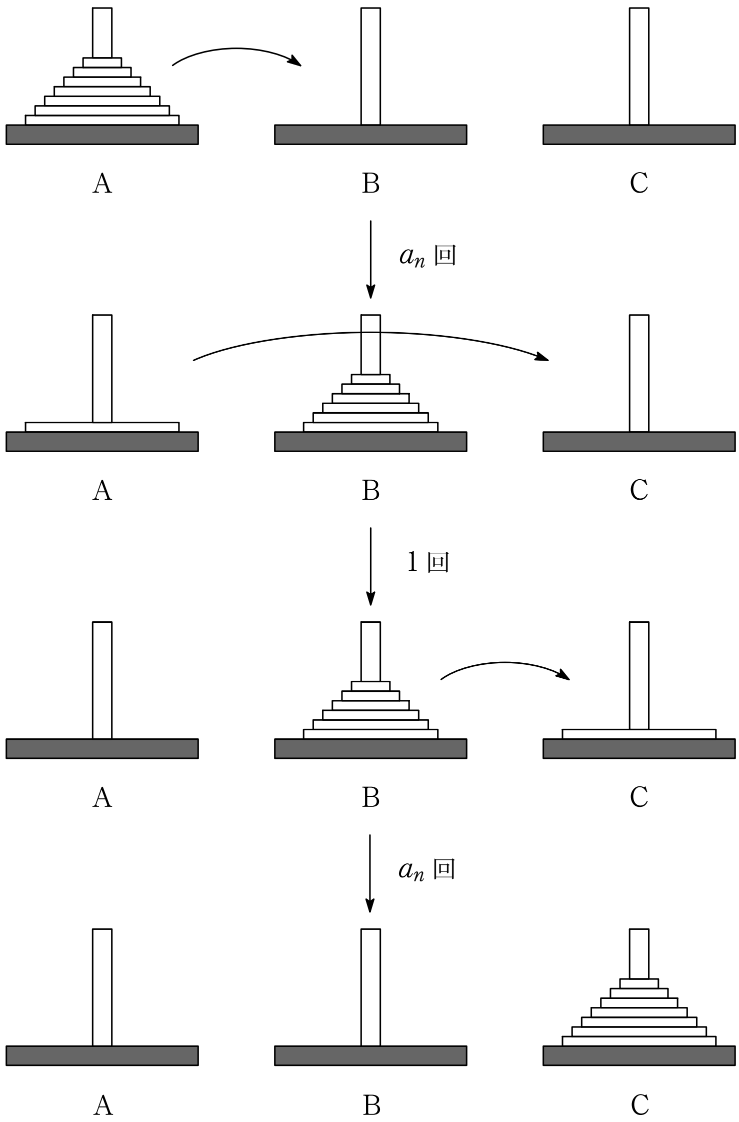
$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n \iff a_{n+1} = 2a_n + 1$$ ☞ **図を参照**

が成り立つ．これを式変形すると，

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \iff a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

となることから，数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$ ，公比 2 の等比数列である．ゆえに，

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{a_n = 2^n - 1} \cdots\cdots (\text{答})$$



別解

本問では，a_1, a_2, a_3 を求めて a_n を類推することもできます．しかし，それはあくまで予想なので数学的帰納法で証明しなければいけません．

はじめに円盤がささっているのはポール A であるとする．円盤を半径の小さいものから C_1, C_2, C_3 とする．

$n=1$ のとき，ポール B へ移せばよいので，$a_1=1$ である．

$n=2$ のとき，ポール B へ C_1 を移し，ポール C へ C_2 を移し，ポール B にある C_1 をポール C に移せばよいので，$a_2=3$ である．

$n=3$ のとき，同様にすると，$a_3=7$ となることから，

$$a_n=2^n-1$$

であると類推できる．これを数学的帰納法で示す．

【証明】

（ i ） $n=1$ のとき，

明らかに成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，

$a_k=2^k-1$ であると仮定すると，

$n=k+1$ のとき，

k 枚の円盤をポール B に移し，$k+1$ 枚目の円盤をポール C に移し，さらにポール B にある k 枚の円盤をポ

ール C に移せばよいので，

$$a_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

となるので，$n = k + 1$ のときも成り立つ．
ゆえに，(ｉ)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，$a_n = 2^n - 1$ であることが示された．（証明終）……（答）

◇ ♡

解説
2 通りの解法を示しましたが，解答 と 別解 を見比べてもらえばわかるように，結局同じことをしています．つまり，本問の解法のポイントは「 n 枚の円盤をまとめて動かす」というところにあります．解答 はそれが何回かかるかわからないので，a_n とし，別解 はそれが $2^n - 1$ 回であろうという類推の元で計算しているのです．したがって，2 つの解法は本質的には同じことをしているのがわかると思います．

参考
ここで，もしも $n = 30$ だったとしましょう．つまり，円盤が 30 枚あったとします．規則を守ってこの円盤を移動させたらいったいどのくらいの回数と時間がかかるのでしょうか？

$$n = 30 \text{ ですから，} a_{30} = 2^{30} - 1 = 1073741823$$

となります．つまり，移動回数は 10 億 7374 万 1823 回になってしまいます．もし 1 秒間に 1 枚の円盤を動かすことになれば，1 年（365 日）が 3153 万 6000 秒ですから，

$$1073741823 \div 31536000 = 34.048\cdots\cdots$$

となることからなんと 34 年以上もかかってしまいます．たった 30 枚の円盤でこんなに暇つぶしができるとは…恐るべしハノイの塔…

原点を O とする平面上に中心 $(2, 2)$，半径 1 の円 C がある．C 上に動点 P_1 (a, b) をとり，直線 OP_1 と円 C が交わる 2 点のうち P_1 以外の交点を P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点を M とするとき，次の各問いに答えよ．

（1） P_2, M の座標を a, b を用いてできるだけ簡単な形で求めよ．

（2） 点 M の軌跡を求めよ．

原点を O とする平面上に中心 $(2, 2)$，半径 1 の円 C がある．C 上に動点 $\mathrm{P_1}$ (a, b) をとり，直線 $\mathrm{OP_1}$ と円 C が交わる 2 点のうち $\mathrm{P_1}$ 以外の交点を $\mathrm{P_2}$ とする．線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点を M とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{P_2}$, M の座標を a, b を用いてできるだけ簡単な形で求めよ．

(2) 点 M の軌跡を求めよ．

【テーマ】：軌跡

方針

点 M の軌跡が求めたいので，$\mathrm{M}(X, Y)$ とおいて X, Y の関係式を求める．という軌跡の常套手段にしたがって解答すればよい．軌跡の限界があることに注意．

本問は，方針 でも示したとおり，軌跡の問題では標準的な問題なのだが，文字計算が大変なので，文字計算に慣れていない人にはやや難しく感じることと，軌跡の限界が出てくることに注意が必要です．ある程度正しい図がかければ軌跡の限界の有無はわかるはずなので，軌跡を求めるときは，必ずどのような軌跡になるのか？と予想することも大切です．

ポイント

図をかいて，軌跡の限界の有無を予想！
式変形は意味を考えながら行う

♣ ♠

解答

(1) C ：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ である．

$$\text{直線 OP ：} y=\frac{b}{a}x$$

これを，円の式に代入して，

$$(x-2)^2+\left(\frac{b}{a}x-2\right)^2=1$$

これを，x に関して整理すると，

$$(a^2+b^2)x^2-4a(a+b)x+7a^2=0 \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

$$x=\frac{2a(a+b)\pm\sqrt{4a^2(a+b)^2-7a^2(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$$

ここで，点 P は円 C 上の点であるから，

$$(a-2)^2+(b-2)^2=1$$

$$a+b=\frac{a^2+b^2+7}{4} \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

これを代入して，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2a\dfrac{a^2+b^2+7}{4} \pm \sqrt{4a^2\dfrac{(a^2+b^2+7)^2}{16} - 7a^2(a^2+b^2)}}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a\dfrac{a^2+b^2+7}{2} \pm a\sqrt{\dfrac{1}{4}\{(a^2+b^2)^2+14(a^2+b^2)+49-28(a^2+b^2)\}}}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(a^2+b^2+7)a \pm \sqrt{\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-7)^2}}{2(a^2+b^2)} \\
&= \frac{(a^2+b^2+7)a \pm a(a^2+b^2-7)}{2(a^2+b^2)} \\
&= \begin{cases} a \\ \dfrac{7a}{a^2+b^2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$x \neq a$ より，

$$x = \frac{7a}{a^2+b^2}$$

したがって，求める P_2 の値は，

$$\mathbf{P_2}\left(\boldsymbol{\frac{7a}{a^2+b^2}}\ \text{,}\ \boldsymbol{\frac{7b}{a^2+b^2}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

よって，M の座標は，

$$\mathrm{M}\left(\frac{\dfrac{7a}{a^2+b^2}+a}{2}\ ,\ \frac{\dfrac{7b}{a^2+b^2}+b}{2}\right)$$

これを整理して，

$$\mathbf{M}\left(\boldsymbol{\frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}}\ \text{,}\ \boldsymbol{\frac{2b(a+b)}{a^2+b^2}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと，

$$X = \frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}\ ,\ Y = \frac{2b(a+b)}{a^2+b^2}$$

となる．ここで，

$$X^2+Y^2 = \frac{4(a+b)^2}{a^2+b^2}\ ,\ X+Y = \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}$$

したがって，

$$X^2+Y^2 = 2(X+Y)$$

これを，整理して，

$$(X-1)^2+(Y-1)^2 = 2$$

問題から，点 M の軌跡は，この円が円 C によって切り取られた部分であるから，2 円の交点を求める必要がある．

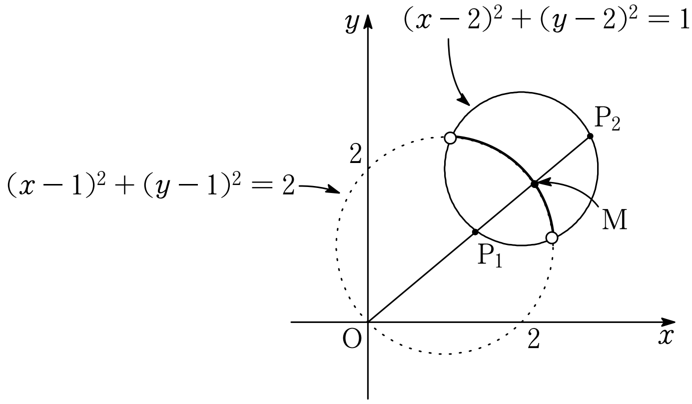
$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 = 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，

$$x = \frac{7\pm\sqrt{7}}{4}\ ,\ y = \frac{7\mp\sqrt{7}}{2}\quad (\text{複号同順})$$

求める点 M の軌跡は，

$$\textbf{中心 }(1,1)\textbf{，半径 }\sqrt{2}\textbf{ の円で}\left(\begin{array}{c}\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}<x<\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}\\[2mm] \dfrac{7-\sqrt{7}}{2}<y<\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right)\textbf{の部分}\cdots\cdots\text{(答)}$$



♢ ♡

解説

(1) の計算では，x の 2 次方程式を解の公式を用いて解きましたが，次のように計算することもできます．

Ⓐ, Ⓑ より，

$$(a^2+b^2)x^2-a(a^2+b^2+7)x+7a^2=0$$

であるから，これを因数分解して，

$$\left\{(a^2+b^2)-7a\right\}(x-a)=0$$

となる．よって，$x=\dfrac{7a}{a^2+b^2}$, a

そんな因数分解なんて思いつかないよ！って言う人がいるかもしれませんが，よく考えてみてください．Ⓐ の実数解は直線 OP と円 C の交点の x 座標を表します．つまり Ⓐ の解の一つは点 P_1 の x 座標である a に他ならないのです．それをヒントに因数分解をしていけば容易に求めることができます．

(2) の計算は一度経験していなければやや困難でしょう！しかし，これにも解答の糸口はあるのです．それは，始めに述べたように点 M の軌跡が予想できているかどうかにかかってきます．もし円であるという予想が立っていれば答えは当然 X^2, Y^2 を含んでいるはずなので，まずはこの計算をしてみることから始めるでしょう！しかし，円であるという予想が立っていない人はこの計算をするには勇気がいります．（ただでさえ式が複雑なのに 2 乗したらもっと複雑になりそうだという心境が働くためです．）

このように，式変形は闇雲にするのではなく，今何を求めているのか？あるいは，この方程式の解の一つは何なのか？など，式の意味を捉えながらすると見通しが立つことがあります．普段の学習でこのような癖をつけるようにして本番に備えましょう．

準線が $x=-p$ ，焦点が $\mathrm{F}(p,\,0)$ の放物線 C がある．C 上の点 A から準線に垂線をおろしその足を H とする．このとき，点 A における接線と $\angle\mathrm{HAF}$ の二等分線とは一致することを示せ．

準線が $x=-p$，焦点が $\mathrm{F}(p,0)$ の放物線 C がある．C 上の点 A から準線に垂線をおろしその足を H とする．このとき，点 A における接線と $\angle\mathrm{HAF}$ の二等分線とは一致することを示せ．

【テーマ】：放物線の接線と二等分線

方針

$\angle$HAF の二等分線をどのように求めるかが鍵となる．通る点はわかっているので，傾きに着目したい．

点 A における接線の方程式は容易に求められるはずであるが，二等分線をどのように求めるかがポイント！
方針 にも書いたように傾きに着目しよう．接線と x 軸のなす角を θ とおくと，二等分線と x 軸のなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ となります．

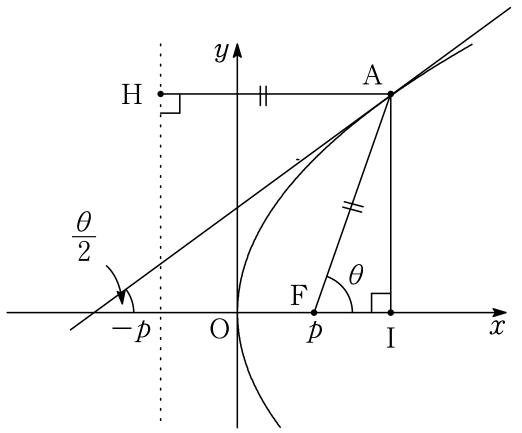
ポイント

二等分線の方程式は，傾きに着目！

♣ ♠

解答

【証明】



$\angle$HAF の二等分線を l，点 A における接線を m とする．
点 A から x 軸に垂線を下ろしその足を I とする．
$\angle\mathrm{AFI}=\theta$ とおくとき，l と x 軸とのなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ となる．
ここで，点 A を第 1 象限にとっても一般性は失わないので，
$\mathrm{A}(a,b)$ $(a>0,\ b>0)$ とおくと，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

であり，$\triangle$AFI において，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AF}}=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AH}}=\frac{a-p}{a+p}$$

したがって，

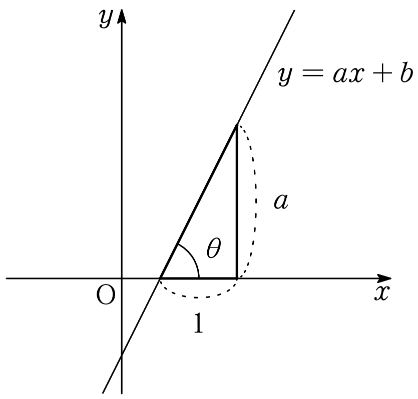
$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\dfrac{a-p}{a+p}}{1+\dfrac{a-p}{a+p}}=\frac{a+p-(a-p)}{a+p+a-p}=\frac{p}{a}\iff\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{p}{a}}\quad\left(\because\ \tan\frac{\theta}{2}>0\right)$$

よって，直線 l の傾きは，$\sqrt{\dfrac{p}{a}}$ である．C の方程式は $y^2=4px$ であるから，

$$2yy'=4p\iff y'=\frac{2p}{y}=\frac{2p}{\pm\sqrt{4px}}=\pm\sqrt{\frac{4p^2}{4px}}=\pm\sqrt{\frac{p}{x}}$$

であり，点 A が第 1 象限にあることから直線 m の傾きは，$\sqrt{\dfrac{p}{a}}$ である．
ゆえに，l,m の傾きが一致しどちらも点 A を通るので，l,m は一致することが示された．**(証明終)**……(答)

◇ ♡



解説

直線の傾きは，tan を用いて表すことができます．
直線 $y=ax+b$ と x 軸のなす角を θ とすると，

$$\tan\theta=a$$

が成り立つことは，知っているでしょう．
よく使う式ですから，しっかりと覚えておきましょう．
本問の結果は，おもしろい結果だと思いませんか？そう思うのは私だけ!?

次の各問いに答えよ．

（1） a を任意の実数とするとき，$y = x|a - x|$ のグラフをかけ．

（2） $f(x) = \int_{-1}^{x} t|1 - t|\, dt$ としたとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

次の各問いに答えよ．

（1）　a を任意の実数とするとき，$y=x|a-x|$ のグラフをかけ．

（2）　$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} t|1-t|\,dt$ としたとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分で表された関数

方針

a について場合分けをしてグラフをかきましょう．(2) は，$a=1$ のときなので，(1) でかいたグラフを参考にして定積分を計算します．ただし，x の値で再び場合分けが必要になります．

本問は，変数が 2 つもあるので，苦手な人が多いのが現状です．x と t があるので，わけがわからなくなるという意見が多いですね！ (2) だけが出題されることも多いので，自分で本問のように (1) を補ってやらなければいけません．積分変数が t なのですから，x は定数という気持ちで積分の計算をします．そうすれば，グラフから場合分けが必要であることはすぐに理解できるでしょう．

ポイント

積分変数に着目して積分するので，それ以外の文字は定数扱い！

♣　♠

解答

(1)

（i）　$a>0$ のとき，

Ⓐ　$x \geqq a$ のとき，
$y=x(x-a)$

Ⓑ　$x<a$ のとき，
$y=x(a-x)$

（ii）　$a=0$ のとき，

Ⓐ　$x \geqq 0$ のとき，
$y=x^2$

Ⓑ　$x<0$ のとき，
$y=-x^2$

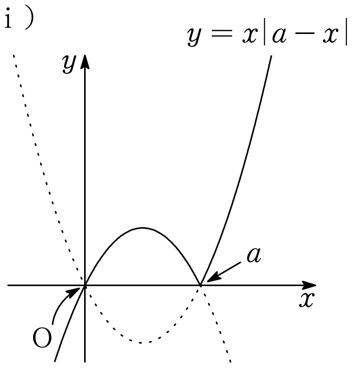
（iii）　$a<0$ のとき，

Ⓐ　$x \geqq a$ のとき，
$y=x(x-a)$

Ⓑ　$x<a$ のとき，
$y=x(a-x)$

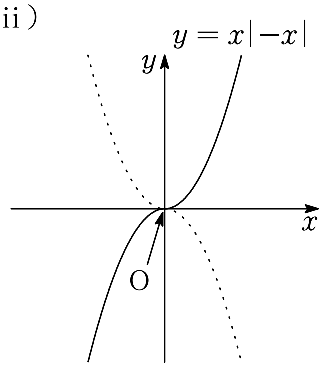
これより，それぞれのグラフは，次のようになる．

（i）



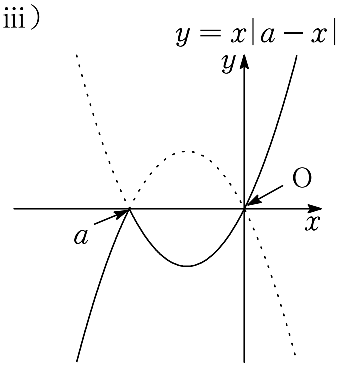
$a \geqq 0$

（ii）



$a=0$

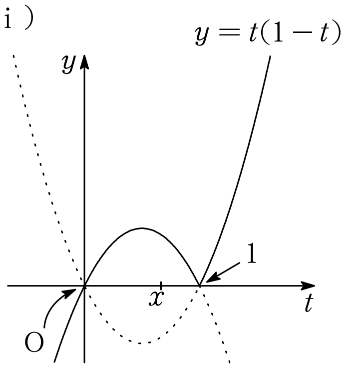
（iii）



$a<0$

(2) (1) より，$y = t|1-t|$ のグラフは次のようになる．

（ｉ）



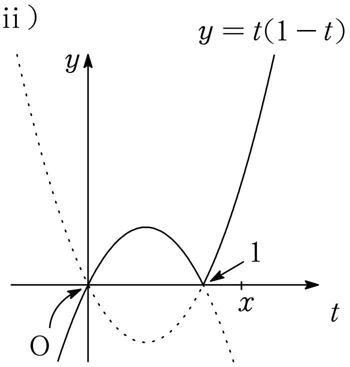
よって，

（ｉ） $x<1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{x} t(1-t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (t-t^2)\,dt \\ &= \left[\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\ \right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

（ii） $x \geqq 1$ のとき，

（ii）



$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{1} t(1-t)\,dt + \int_{1}^{x} t(1-t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (t-t^2)\,dt + \int_{1}^{x} (t^2-t)\,dt \\ &= -2\int_{0}^{1} t^2\,dt + \left[\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\ \right]_{1}^{x} \\ &= -2\left[\ \frac{1}{3}t^3\ \right]_{0}^{1} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

（ｉ）のとき，$f'(x) = -x^2 + x$ であるから，$f'(x) = 0$ のとき，$x = 0$ である．
（ii）のとき，$f'(x) = x^2 - x$ であるから，$f'(x) = 0$ のとき，$x = 1$ である．
よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{6}$	↗		↗

ゆえに，$x = 0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{5}{6}}$……(**答**) をとる．

◇ ♡

解説

本問のように被積分関数が絶対値を含んでいるときは，被積分関数のグラフをかくことが大切です．本文では，被積分関数に x を含んでいないので，そんなに難しくありませんが，もしも被積分関数に x を含んでいる場合は，x を定数という扱いでグラフを考えましょう．((1) での a と同じように考えるということです．)

本問で勘違いしてほしくないのは，$f(x)$ は面積を表しているというわけではないことです．したがって，定積分の計算をする際に $x = 0$ で積分区間を分ける必要はありません．したがって，最小値が負の数になることもあるのです．積分 = 面積という安直な考えはときに，思わぬ誤解を招くので十分に注意しましょう．

k を自然数とする．次の連立不等式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を k で表せ．

$$\begin{cases} y \leqq \dfrac{x}{2} + k \\ y \geqq x - k^2 \\ x \geqq -k^2 - k \end{cases}$$

k を自然数とする．次の連立不等式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を k で表せ．

$$\begin{cases} y \leqq \dfrac{x}{2} + k \\ y \geqq x - k^2 \\ x \geqq -k^2 - k \end{cases}$$

【テーマ】：格子点問題

方針

領域を図示して，y 軸に平行な直線上の点にある格子点の個数を求めます．後は，それを加えて，領域内の格子点の個数を計算します．

格子点に関する問題は頻出と言っても過言ではないでしょう．本問は領域が三角形になりますが，問題によっては放物線や指数関数が領域の境界になることもあるので，様々なタイプを演習しておくことを勧めます．

ポイント

軸に平行な直線上の格子点の数を求めて加える

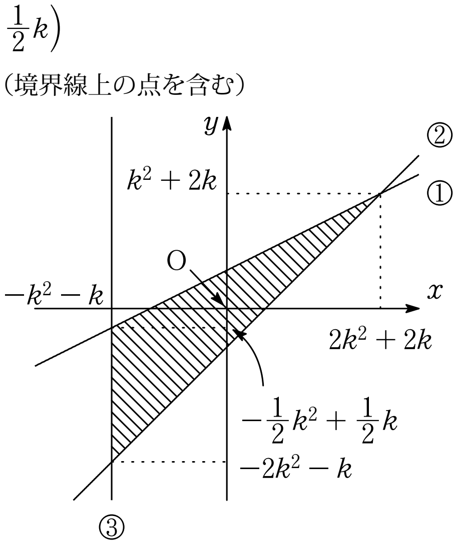
解答

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + k & \cdots\cdots① \\ y = x - k^2 & \cdots\cdots② \\ x = -k^2 - k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

とおく．これらのうちの 2 直線の交点を求めると，次のようになる．

$$\begin{cases} ①,\ ② \text{ の交点} & (2k^2 + 2k,\ k^2 + 2k) \\ ②,\ ③ \text{ の交点} & (-k^2 - k,\ -2k^2 - k) \\ ③,\ ① \text{ の交点} & \left(-k^2 - k,\ -\dfrac{1}{2}k^2 + \dfrac{1}{2}k\right) \end{cases}$$

したがって，与えられた領域を図示すると，下図の斜線部分のようになる．（境界線上の点を含む）



ここで，$x = -k^2 - k$ 上には

$$-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - (-2k^2 - k) + 1 = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 \text{（個）}$$

の格子点が存在している．$N = \dfrac{3}{2}k^2 + \dfrac{3}{2}k + 1$ とおくと，① の傾きが 1 で，② の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であることから，

$$\begin{aligned} &x = -k^2 - k \text{ 上} & \cdots\cdots \quad & N \text{（個）} \\ &x = -k^2 - k + 1 \text{ 上} & \cdots\cdots \quad & N - 1 \text{（個）} \\ &x = -k^2 - k + 2 \text{ 上} & \cdots\cdots \quad & N - 1 \text{（個）} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x = 2k^2 + 2 - 1 \text{ 上} \quad \cdots\cdots \quad 1\,(\text{個})$$

$$x = 2k^2 + 2k \text{ 上} \qquad \cdots\cdots \quad 1\,(\text{個})$$

のように 1, 2, ……$N-1$ がそれぞれ 2 個ずつ存在する．よって，求める格子点の個数は，

$$\begin{aligned} N + 2\{(N-1)+(N-2)+\cdots\cdots+2+1\} &= N + 2\cdot\frac{1}{2}N(N-1) \\ &= N^2 \\ &= \boldsymbol{\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{3}{2}k+1\right)^2}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

直線の方程式に k が使われているため，そのままでは式が複雑になってしまいます．解答をするときは，シンプルに計算を進めたほうが間違いが少なくてすむので，$N = \dfrac{3}{2}k^2 + \dfrac{3}{2}k + 1$ とおきました．
今回は三角形領域ですが，問題によっては，曲線が絡むことがあります．また，三角形領域でも形が複雑（三角形の各辺が軸に対して平行や垂直でない場合）になると，計算が面倒になって計算間違いを起こしたりします．格子点問題が多く出題される大学を受験予定の人は，特に注意が必要です．

座標空間に 4 点 A$(0, 1, -1)$, B$(1, 2, 0)$, C$(-1, 2a-2, 1)$, D$(b^2-2b+2, 0, 0)$ がある.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが垂直になる実数 a の値を求めよ.

(2) (1) のとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な大きさ 1 のベクトルを 1 つ求めよ.

(3) (1) のとき，四面体 ABCD の体積が最小となる実数 b の値を求めよ．また，そのときの体積を求めよ.

座標空間に 4 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(-1,\ 2a-2,\ 1)$, $\mathrm{D}(b^2-2b+2,\ 0,\ 0)$ がある．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが垂直になる実数 a の値を求めよ．

(2)　(1) のとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な大きさ 1 のベクトルを 1 つ求めよ．

(3)　(1) のとき，四面体 ABCD の体積が最小となる実数 b の値を求めよ．また，そのときの体積を求めよ．

【テーマ】：正射影ベクトルの利用

方針

(2) で何を求めさせられているかに気付くことが解決への鍵となります．四面体の体積を計算する際，底面・高さをどのように捉えるかがポイントです．

正射影ベクトルを知らない人にとっては，(1), (2) で何を求めさせられているかが見えにくい問題でしょう．問題で何が問われているかが分かれば誘導されている気がしますが，そうでなければ，(1), (2) を (3) でどのように生かすかが分からず息詰まってしまいます．

2 つのベクトルにともに垂直なベクトルは，その 2 つのベクトルを含む平面に垂直なベクトルです．その平面上にある四面体の面を底面とみて高さをそれに垂直なベクトルを用いて求めるというのが本問の解決のポイントとなります．ここではその高さを正射影ベクトルを用いて求めてみましょう．正射影ベクトルについては，後でまとめておきます．

ポイント

正射影ベクトルを利用して四面体の高さを求める

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2a-3,\ 2)$ であるから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \iff -1+2a-3+2=0 \iff \boldsymbol{a=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 2)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{e},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{e},\ \left|\vec{e}\right|=1$$

より，

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots\cdots① \\ -x-y+2z=0 & \cdots\cdots② \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

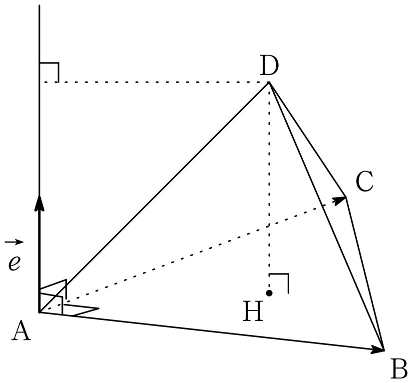
となる．① + ② より，$z=0$ を得る．これを ① に代入すると，$y=-x$ を得るので，③ から，

$$x^2+x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに，$y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（複号同順）を得る．したがって，求める単位ベクトルの一つは，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\quad\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\ \textbf{でも可}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　点 D から 3 点 A, B, C を含む平面に垂線を下ろし，その足を H とすると，△ABC の面積は一定であるから，体積が最小となるのは DH が最小となるときである．



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}}{\left|\vec{e}\right|^2}\vec{e}\right| \quad ☞ \boxed{解説}$$
$$= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}\right|}{\left|\vec{e}\right|}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (b^2-2b+2,\ -1,\ 1)$ であるから，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}\right| \quad (\because\ \left|\vec{e}\right| = 1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|(b^2-2b+2,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 0)\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|b^2-2b+3\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(b-1)^2+2\} \quad (\because\ (b-1)^2+2>0)\end{aligned}$$

ゆえに，$b=1$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|$ は最小値 $\sqrt{2}$ をとるので，このときの体積 V は，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

以上より，体積の最小値とそのときの b の値は，$\boldsymbol{b=1,\ V=1}$……(答)

◇　♡

$\boxed{解説}$

さまざまな計算テクニックが学べる問題です．(2) では，2 つのベクトルに垂直なベクトルを求める問題ですが，その際にちょっと面倒な連立方程式を解かなければいけません．本問のように簡単に求まる問題ならばそれほど大変ではないのですが，

$$\begin{cases}-2x+y-z=0\\ 3x+2y+2z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

のような形だとそれを解くだけでもちょっと大変です．しかし，この連立方程式を解く部分は省略しても減点されることはほとんどないでしょう．もちろん，きちんと連立方程式を解く過程を解答に書けば何の問題もないでしょうが，それだけで解答用紙の大半を使いかねません．そこで，このタイプの問題は，連立方程式を解いたと見せかけて，別の方法で答えを求めるということをしてみましょう！ただし，これから解説する方法は，『ベクトルの外積』というもので大学になって学習する内容ですから，大学受験をするにあたって解答に書くわけにはいきません．そこで，検算用ということで紹介します．

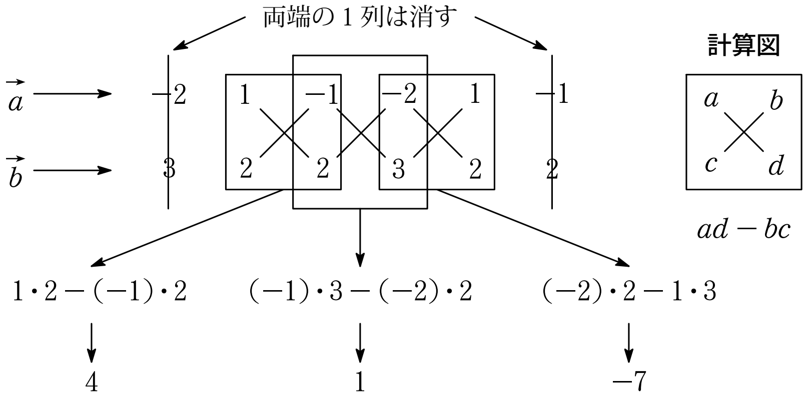
【2つのベクトルに垂直なベクトルの求め方（検算用）】

例題　2 つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ 2)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とすると，題意から $\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{b}\cdot\vec{e}=0$, $\left|\vec{e}\right|=1$ が成り立つので,

$$(*)\quad \begin{cases} -2x+y-z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

では，この連立方程式を『ベクトルの外積』という方法を用いて解いてみましょう.



【手順】

（ｉ） $\vec{a}, \vec{b}$ の成分を上図のように 2 回ずつ横に並べて書きます.

（ii） 両端の 1 列を消します.

（iii） 真ん中に残った 8 個の数字を上図のように 4 つずつの数字の塊として 3 つに分けます.

（iv） 上図の計算図にしたがって計算を行います.（数学 C の行列を学習している人は，行列式の計算と同じなので，覚えやすいでしょう.）

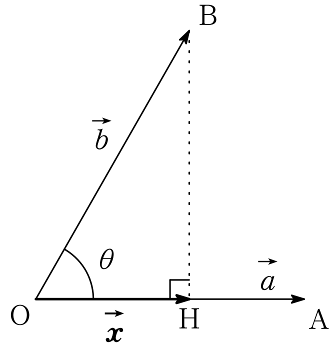
（ｖ） 計算によって，得られた 3 つの値が求めたいベクトルに平行なベクトルの $x,\ y,\ z$ 座標となっています.

ここで，得られたベクトルを $\vec{c}$ とすると，$\vec{c}=(4,\ 1,\ -7)$ というのは，$\vec{e}$ に平行なベクトルなので，$\vec{e}$ を求めるためには単位ベクトルにする必要があります．したがって，求める $\vec{e}$ は方向を考慮に入れれば,

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{66}}(4,\ 1,\ -7)$$

となりますから，連立方程式の解は，$(x,\ y,\ z)=\left(\pm\frac{4}{\sqrt{66}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{66}},\ \mp\frac{7}{\sqrt{66}}\right)$（複号同順）であることがわかります.

次は，正射影ベクトルについて説明しましょう．



右図のように，点 B から直線 OA 上に垂線 H を下ろしその足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{x}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影ベクトル**といいます．このとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表してみましょう．そのためには，内積の図形的意味を理解しなければいけません．
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，$\vec{a}$ の大きさと $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトル，すなわち $\vec{x}$ の大きさの積という形で定義されています．
$\mathrm{OH} = \mathrm{OB}\cos\theta$ ですから，$\mathrm{OH} = \left|\vec{b}\right|\cos\theta$ となります．
したがって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

となるわけです．

$\left|\vec{x}\right| = \left|\vec{b}\right|\cos\theta$ なので，$\vec{a}$ を単位ベクトルにして，$\left|\vec{x}\right|$ 倍すれば $\vec{x}$ になりますから，

$$\vec{x} = \left|\vec{b}\right|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\vec{b}\right|\cos\theta}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}$$

よって，

$$\left|\vec{x}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|^2}\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

となります．

本問では，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の $\vec{e}$ への正射影ベクトルを考えて，それを高さとみて解答をしています．このことは知っているとかなり有効に使えますので，ベクトルが頻出の大学を受験予定の人は是非習得しておきましょう．

1 つのさいころを 30 回投げたときに 1 の目が k 回出る確率を P_k とする $(0 \leqq k \leqq 30)$．このとき，次の問いに答えよ．

（1）$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を求めよ．（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 29$）

（2）$P_{k+1}>P_k$ をみたす k の最大値を求めよ．

（3）P_k の値が最大となるときの k の値を求めよ．また，2 番目に大きい値になるときの k の値を求めよ．

1 つのさいころを 30 回投げたときに 1 の目が k 回出る確率を P_k とする $(0 \leqq k \leqq 30)$．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を求めよ．$(k = 0, 1, 2, \cdots, 29)$

(2) $P_{k+1} > P_k$ をみたす k の最大値を求めよ．

(3) P_k の値が最大となるときの k の値を求めよ．また，2 番目に大きい値になるときの k の値を求めよ．

【テーマ】：確率の最大値

方針

P_k は階乗を含む式になるので，このままでは最大値を求めることが困難です．そこで，問題文の設問にあるように $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を計算し，1 との大小を比較して P_k が最大になるときを求めます．

誘導形式とはいえ，本質を理解していなければ何をしているのかよくわからないでしょう．方針 にも書いたように，P_k が階乗を含む式になるので，このままでは P_k の最大値が求められません．そこで，次のように考えて最大となる k を決定します．

$$P_{k+1} < P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \quad \cdots\cdots①$$

$$P_{k+1} = P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} = 1 \quad \cdots\cdots②$$

$$P_{k+1} > P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad \cdots\cdots③$$

このように，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べることで，P_{k+1} と P_k の大小関係がわかるのです．しかも $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ のように分数計算にすることで，階乗が消えるというメリットもあります．あとは，①, ②, ③ をみたす自然数 k の値を求めて，それに基づいて

$$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l > P_{l+1} > \cdots\cdots$$

となるような l を求めれば，$k = l$ のとき，P_k は最大となるというわけです．

ポイント

階乗を含む式の最大値・最小値を求めるときは，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 との大小を比較

✎**注** ： $P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l = P_{l+1} > P_{l+2} > \cdots\cdots$ のように最大となる k が 2 つ存在することもあります．

♣ ♠

解答

(1) さいころを 1 回投げたとき，1 の目がである確率は同様に確からしく $\dfrac{1}{6}$ であるから，

$$P_k = {}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{30-k} = \frac{30!}{k!(30-k)!} \cdot \frac{5^{30-k}}{6^{30}}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{P_{k+1}}{P_k} &= \frac{\dfrac{30!}{(k+1)!(29-k)!}\cdot\dfrac{5^{29-k}}{6^{30}}}{\dfrac{30!}{k!(30-k)!}\cdot\dfrac{5^{30-k}}{6^{30}}}\\ &= \frac{(30-k)\cdot 1}{(k+1)\cdot 5}\\ &= \boldsymbol{\frac{30-k}{5(k+1)}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned}\frac{P_{k+1}}{P_k}-1 &= \frac{30-k}{5(k+1)}-1\\ &= \frac{30-k-5k-5}{5(k+1)}\\ &= \frac{25-6k}{5(k+1)}\end{aligned}$$

ここで，

$$P_{k+1}>P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k}>1 \iff \frac{P_{k+1}}{P_k}-1>0$$

であるから，$25-6k>0$ となる．したがって，$k<\dfrac{25}{6}$ であり，k は整数であるから，$\boldsymbol{k=4}$……(**答**)

(3) (2) より

$$\begin{aligned}&0\leqq k\leqq 4\text{ のとき，}\quad P_{k+1}>P_k\\ &5\leqq k\text{ のとき，}\qquad P_{k+1}<P_k\end{aligned}$$

となるので，

$$P_0<P_1<P_2<P_3<P_4<P_5>P_6>P_7>\cdots\cdots$$

よって，P_k の値が最大となるのは $\boldsymbol{k=5}$……(**答**)
また，2 番目に大きい値になるのは，

$$\frac{P_6}{P_4}=\frac{\dfrac{30!}{6!24!}\cdot\dfrac{5^{24}}{6^{30}}}{\dfrac{30!}{4!26!}\cdot\dfrac{5^{26}}{6^{30}}}=\frac{26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 5^2}=\frac{13}{15}<1$$

より，$P_6>P_4$ であるから，P_4 である．ゆえに，求める k の値は，$\boldsymbol{k=4}$……(**答**)

◇ ♡

解説

確率の最大値・最小値は，頻出の問題です．誘導してくれている場合が多いですが，誘導なしでも自分で求められるようになっていなければいけません．なお，最小値の場合は，

$$P_0>P_2>\cdots\cdots P_{l-1}>P_l<P_{l+1}<\cdots\cdots$$

となり，$k=l$ のとき，P_k は最小になります．
本問は，2 番目に大きくなるときも問われているので，P_4 と P_6 の大小を比較しなければいけませんが，それぞれを独立に計算すると，ものすごい値になってしまいます．したがって，ここでも最大値を求めたときと同じように $\dfrac{P_6}{P_4}$ と 1 との大小を比較しているのです．

三角形 ABC があり，各辺の長さを $\mathrm{AB}=6,\ \mathrm{BC}=5,\ \mathrm{CA}=7$ とする．辺 AB 上に点 D ， AC 上に点 E をとって，三角形 ADE を作る．三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ であるとき，次の各問いに答えよ．

（1） 線分 AD と AE の長さの積を求めよ．

（2） DE の最小値を求めよ．

三角形 ABC があり，各辺の長さを AB = 6, BC = 5, CA = 7 とする．辺 AB 上に点 D，AC 上に点 E をとって，三角形 ADE を作る．三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\frac{1}{3}$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) 線分 AD と AE の長さの積を求めよ．

(2) DE の最小値を求めよ．

【テーマ】：三角形を二分する線分の最小値

方針

AD = x, AE = y とおいて，面積の条件から xy を求めることができます．DE の最小値は，余弦定理を利用して，DE を xy で表すことから始めよう．

東京工業大学・京都大学など，様々な大学で類題が出題されています．それらの大学では，辺の長さに文字が入っていたりして，場合分けが必要になったりするものがあります．本問はその中でも一番易しいタイプです．比較的見通しが立つので，解きやすい問題になっています．最小値は，相加平均・相乗平均の関係をうまく利用できるかどうかがポイントになります．

ポイント

最大値・最小値は相加平均・相乗平均が利用できることがある

相加平均・相乗平均の関係が使える場面では，文字が 0 以上であることと，和と積の関係から最大値・最小値を求める．また，逆数の形があるなど，ある程度決まった状況が多いので，演習を通して経験しておくことが必要です．

♣ ♠

解答

(1) AD = x, AE = y とおくと，

$$\triangle\mathrm{ADE} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin A$$
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \sin A$$

である．また，題意より △ABC = 3△ADE であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \sin A = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin A \iff \boldsymbol{xy = 14}\cdots\cdots(\text{答}) \quad \cdots\cdots ①$$

(2) △ABC で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{36+49-25}{2\cdot 6\cdot 7}\\ &= \frac{60}{2\cdot 6\cdot 7}\\ &= \frac{5}{7} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

△ADE で余弦定理より，

$$\begin{aligned}DE^2 &= x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cdot\cos A\\ &= x^2+y^2-2\cdot 14\cdot\frac{5}{7} \quad (\because ①, ②)\\ &= x^2+y^2-20\end{aligned}$$

ここで，$x^2>0$, $y^2>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 28 \quad (\because ①)$$

等号は，$x^2=y^2$ すなわち $x=y=\sqrt{14}$ のとき成り立つ．ゆえに，

$$\mathrm{DE}^2 \geqq 28-20=8$$

DE>0 であるから，$\mathrm{DE} \geqq 2\sqrt{2}$ である．ゆえに，DE の最小値は，$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=\sqrt{14}$ のとき，$\mathbf{2\sqrt{2}}$……(答)

◇　♡

解説

最大値・最小値を求める方法は，様々な方法があります．2 次関数であれば平方完成をすればいいし，3 次関数以上なら微分して増減表を書けば求めることができます．三角関数や指数関数・対数関数も置き換えなどを用いてやれば 2 次関数や 3 次関数に帰着できることが多々あります．しかし，それ以外にも分数の形をしたものや本問のように 2 変数のものなど様々なものがあります．それらに関しても最大値・最小値を求める手段はいろいろあるのです．その一つの方法が相加平均・相乗平均の関係です．シュワルツの不等式を用いる問題もあります．最大値・最小値に関する問題は入試では頻出なので，より多くの経験を積んでおきましょう．

点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を通る直線と，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ との交点を A, B とする．A, B における放物線の接線の交点を C とすれば，$\mathrm{AB} \perp \mathrm{CF}$ となることを示せ．

点 F$(0,\ p)$ を通る直線と，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ との交点を A, B とする．A, B における放物線の接線の交点を C とすれば，AB ⊥ CF となることを示せ．

【テーマ】：直交条件の表現

方針

点 F を通る直線と，放物線 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$ の交点の座標を自分で設定して，素直に計算すれば証明できます．

交点の x 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とおいて素直に計算すればよいだけなのですが，直交条件をどのように表現すればよいかで解答が分かれるでしょう．直交と聞いて思い出せるものはいくつありますか？

ポイント

直交しているならば $\left\{\begin{array}{l}\text{傾きかけて}-1\\ \text{内積}\,0\end{array}\right\}$ を利用.

♣　♠

解答

【証明】

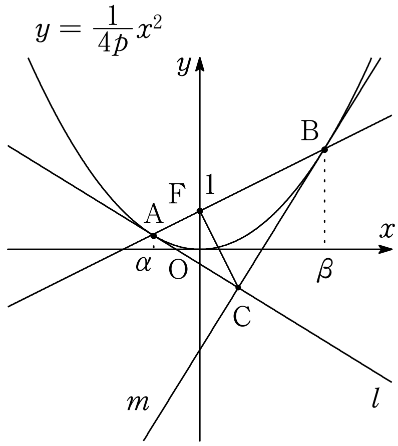
まず，$p>0$ として考える．$\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{4p}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{\beta^2}{4p}\right)$ とおく．

A, B における放物線の接線をそれぞれ l, m とすると，

$y'=\dfrac{1}{2p}x$ より，

$$y=\frac{1}{2p}\alpha(x-\alpha)+\frac{\alpha^2}{4p}$$

$$\therefore\ y=\frac{\alpha}{2p}x-\frac{\alpha^2}{4p}\ \cdots\cdots①$$



同様にすると，

$$y=\frac{\beta}{2p}x-\frac{\beta^2}{4p}\ \cdots\cdots②$$

を得る．l, m の交点の x 座標は，①, ② より，

$$\frac{\alpha}{2p}x-\frac{\alpha^2}{4p}=\frac{\beta}{2p}x-\frac{\beta^2}{4p}\quad\Longleftrightarrow\quad 2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$$

$\alpha\neq\beta$ であるから，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．よって，y 座標は，

$$y=\frac{\alpha}{2p}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha^2}{4p}=\frac{\alpha\beta}{4p}$$

となる．したがって，点 C の座標は，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha\beta}{4p}\right)$ となる．

ここで，点 F を通る直線の傾きを k とすると，α, β は 2 次方程式

$$\frac{1}{4p}x^2=kx+p\quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4pkx-4p^2=0$$

の 2 解であるから，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=4pk,\ \alpha\beta=-4p^2\quad\cdots\cdots③$$

が成り立つ．よって，$\mathrm{C}(2pk,\ -p)$ である．直線 AB と直線 CF の傾きはそれぞれ

$$\frac{\frac{1}{4p}(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{4p}=k,\ \frac{-p-p}{2pk}=-\frac{1}{k}$$

となるので，これらの傾きの積が -1 となることから，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CF}$ となることが示された．
$p<0$ のときも同様になるので，題意は示された． **(証明終)……(答)**

別解

直交するということなので，ベクトルを用いても解答することができます．点 C を求めるところまでは同じですから，それ以降を記述します．

【証明】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\beta-\alpha,\ \frac{\beta^2-\alpha^2}{4}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{FC}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha\beta}{4p}-p\right),\ \overrightarrow{\mathrm{FA}}=\left(\alpha,\ \frac{\alpha^2}{4p}-p\right)$$

であるから，③ を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\beta-\alpha,\ pk(\beta-\alpha)\right),\ \overrightarrow{\mathrm{FC}}=(2pk,\ -2p)$$

となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}}=2pk(\beta-\alpha)-2pk(\beta-\alpha)=0$$

よって，題意は示された． **(証明終)……(答)**

◇ ♡

解説

直交するという条件から，「傾きかけて -1」という方針か「内積 0」という方針の 2 種類が見えてきます．
本問の場合は，どちらにしても計算をうまくしないと，計算量が膨大になってしまいます．ベクトルを使った解答では，**別解** でもしているように $\beta-\alpha$ をそのままにしておく方が計算が簡単になります．
また，本問ではもう一つ注意しないといけないことがあります．それは p の符号です．対称性を考えれば，$p>0$ の場合だけを議論すれば問題ないので，$p<0$ については，同様にすれば成り立つ程度で十分でしょう．ただし，問題文に $y=\frac{1}{4p}x^2$ という式があるので，$p\neq 0$ であることは自明ですから，$p\geqq 0$ や $p\leqq 0$ などのように $=$ を入れないように注意しましょう．

数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立っているとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表せ．

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^n+1-\frac{1}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立っているとき，次の問いに答えよ.

(1)　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表せ.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ.

【テーマ】：和と一般項の関係

方針

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおいて，和と一般項の関係式を利用する.

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$$a_1=S_1\ ,\ \ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots①$$

が成り立つことは，よく知っていると思いますが，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおくと，当然

$$a_1=S_1\ ,\ \ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

ではありません. $\dfrac{1}{k}\left(a_k+\dfrac{1}{k+1}\right)$ が ① での a_n ですから，

$$\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

となります．公式の意味をしっかりと理解していなければ使えないよい例です.

ポイント

和と一般項の関係は式の意味をよく理解して使いましょう！

♣　♠

解答

(1)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$ とおくと，$S_n=2^n+1-\dfrac{1}{n+1}$ より，

（ i ）$n=1$ のとき，

$$S_1=2+1-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\ \text{より，}\ a_1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\quad\therefore\ a_1=2$$

（ ii ）$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(a_n+\frac{1}{n+1}\right)&=S_n-S_{n-1}\\&=2^n+1-\frac{1}{n+1}-\left(2^{n-1}+1-\frac{1}{n}\right)\\&=2^{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

したがって，

$$a_n + \frac{1}{n+1} = n \cdot 2^{n-1} - \frac{n}{n+1} + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = n \cdot 2^{n-1}$$

$n = 1$ のときは，$a_1 = 1 \cdot 2^{1-1} = 1$ となるので，$n = 1$ のときは成り立たない．よって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 2} \\ \boldsymbol{a_n = n \cdot 2^{n-1}\ (n \geqq 2)} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ とおくと，

$$\begin{array}{rl} T_n = & 2 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots\cdots + \qquad\quad n \cdot 2^{n-1} \\ -)\ \ 2T_n = & \qquad 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots\cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \\ \hline -T_n = & 2 \qquad\quad + \quad 2^2 + \quad 2^3 + \cdots\cdots + \qquad\quad 2^{n-1} - n \cdot 2^n \end{array}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} -T_n &= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^n \\ T_n &= -2^n + 2 + n \cdot 2^n \\ &= \boldsymbol{(n-1) \cdot 2^n + 2} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇　♡

解説

和と一般項に関する基本公式は，意味をきちんと理解していないと，誤った使い方をするので注意しましょうという問題です．$n \geqq 2$ でないと $a_n = S_n - S_{n-1}$ は定義できないので，場合分けをしなければいけません．(1) では $n = 1$ のときと $n \geqq 2$ のときで場合分けをしますが，$n \geqq 2$ で求めた a_n は $n = 1$ では成り立たないので，答えは別々に分けて書く必要が出てくる点に注意が必要です．また，(2) で和の計算をするときも，初項は 2 ですから，間違えないように計算しなければいけないので，注意力が試される問題であるといってもよいでしょう．

公 式　**和と一般項の関係**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，一般項 a_n と和 S_n について，次式が成り立つ．

$a_1 = S_1$，$a_n = S_n - S_{n-1}$　$(n \geqq 2)$

放物線 $y = (x-a)^2 + a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

【テーマ】：曲線の通過領域

方針

曲線が通過する領域内の点を (X, Y) とおいて，X, Y がみたす条件式を求める．そのためには，与えられた放物線の方程式を a に関する 2 次方程式とみなければならない．

直線や曲線の通過領域の問題は，よく出題される問題なのですが，なかなかイメージがつかめず，受験生からわかりにくいということをよく聞きます．簡単な例を挙げておきましょう．たとえば，放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が点 $(1, 1)$ を通るかどうかを調べてみましょう．$x=1, y=1$ を代入すると，

$$1=(1-a)^2+1 \quad \Longleftrightarrow \quad a=1$$

となるので，$a \geqq 0$ をみたし，$a=1$ のときに，確かに点 $(1, 1)$ を通ることがわかります．では点 $(2, -1)$ は通るでしょうか？同様に代入してみると，

$$-1=(2-a)^2+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-2)^2=-2$$

となり，これをみたすような実数 a は存在しません．よって，与えられた放物線の a にどんな実数を代入しても点 $(2, -1)$ は通らないことがわかります．

つまり，もしもこの放物線が点 (X, Y) を通るのであれば，それに対応する実数 a が存在するはずなのです．ここで大切なことは，X, Y を $(1, 1)$ のように定数として見なければいけないということです．そして，a を $a \geqq 0$ の範囲で動かすので，a を変数と見るのです．それが理解できれば，通過領域の問題は制覇したも同然でしょう！

ポイント

通過領域の問題は，どの文字に関する方程式であるかを考える．

♣　♠

解答

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=(X-a)^2+a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a^2-2Xa+X^2-Y=0$$

をみたす．これが $a \geqq 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもてばよい．
ここで，$f(a)=2a^2-2Xa+X^2-Y$ とおくと，

$$f(a)=2\left(a-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{2}X^2-Y$$

よって，

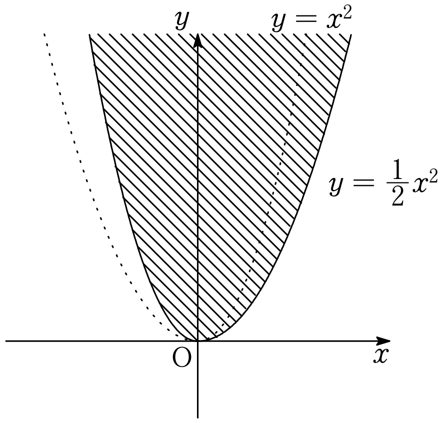
（ｉ）　$\dfrac{X}{2} \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{2}X^2-Y \leqq 0$

または

（ii）　$\dfrac{X}{2} \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

である．

(i) のとき，$X \geqq 0$ かつ $Y \geqq \dfrac{1}{2}X^2$ である．
(ii) のとき，$X \leqq 0$ かつ $X^2 - Y \leqq 0$ すなわち $Y \geqq X^2$ である．
ゆえに，求める通過領域は，下図の斜線部分で境界線上の点を含む．



◇ ♡

解説

この問題は，2 次方程式の解の配置問題に帰着します．したがって，解の配置問題がしっかりできていないと解くことはできません．問題によっては，かなり複雑な条件が絡んでくることもありますが，結局考え方は同じなので，あせることはないでしょう．何が定数で何が変数として扱えばよいのかを演習を通して見分けれらるようになることが大切なのです．

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．たとえば，自然数 2 は，$1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，$2+1,\ 1+2,\ 1+1+1$ の 3 通りの表し方ができる．

（1） 自然数 4 の表し方は何通りあるか．

（2） 自然数 5 の表し方は何通りあるか．

（3） 2 以上の自然数 n の表し方は何通りあるか．

自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える．ただし，$1+2+1$ と $1+1+2$ のように和の順序が異なるものは別の表し方とする．たとえば，自然数 2 は，$1+1$ の 1 通りの表し方ができ，自然数 3 は，$2+1$, $1+2$, $1+1+1$ の 3 通りの表し方ができる．

(1)　自然数 4 の表し方は何通りあるか．

(2)　自然数 5 の表し方は何通りあるか．

(3)　2 以上の自然数 n の表し方は何通りあるか．

【テーマ】：重複組合せ

方針

自然数の数だけ○を用意して，仕切りによってこの○をいくつかの組に分ける．その分け方が求める場合の数と一致する．

場合の数は，考え方次第で様々な解法が考えられます．(1), (2) ならまともに数えても正解できるでしょうが，(3) は一般の場合を考えているので，数えることができません．(1), (2) は (3) の問題を解くときのヒントになっているのです．したがって，(1), (2) で数えてしまっては，(3) を解くことができません．ここは，法則を見つけて (3) を解くときのヒントを探しましょう．

ポイント

問題文の言い回しを別の表現で表す！

♣　♠

解答

(1)　○を 4 つ並べて，これを仕切りによって区切ることを考える．仕切りによって区切られた○の数を数字に対応させる．仕切りの数は $+$ の数に対応する．

自然数 4 を考えるので，○を 4 個用意する．

仕切り 1 本　……　3 通り

仕切り 2 本　……　3 通り

仕切り 3 本　……　1 通り

したがって，$3+3+1=$ **7 (通り)**……(答)

(2)　(1) と同様に考える．

自然数 5 を考えるので，○を 5 個用意する．

仕切り 1 本　……　${}_4C_1=4$ 通り

仕切り 2 本　……　${}_4C_2=6$ 通り

仕切り 3 本　……　${}_4C_3=4$ 通り

仕切り 4 本　……　${}_4C_4=1$ 通り

したがって，$4+6+4+1=$ **15 (通り)**……(答)

(3)　(1), (2) と同様に考える．

自然数 n を考えるので，○を n 個用意する．仕切りの数は，$1 \sim n-1$ 本まで考えられてそれぞれの場合における場合の数は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

であるから，求める場合の数は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

である．ここで，二項定理より

$$(x+1)^{n-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x^{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x + {}_{n-1}\mathrm{C}_0$$

が成り立つので，$x=1$ を代入すると，

$$2^{n-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + 1$$

ゆえに，求める場合の数は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 = \boldsymbol{2^{n-1}-1}\ \textbf{(通り)}\cdots\cdots(\text{答})$$

♢　♡

解説

(3) では，二項定理を利用しなければなりません．二項定理は余弦定理や正弦定理のようにあまり頻繁に使う定理ではないため，受験生の対策はおろそかになりがちです．しかも形が複雑なため嫌いな人が多い．しかし，計算の道具としては強力な力を持っており，意外な場面でよく登場してきます．苦手意識を持っていた人や食わず嫌いになっている人は，ここでもう一度二項定理と向き合ってみてください．受験が終わった後で後悔しないために…

公式　**二項定理**

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r\end{aligned}$$

Σ を用いた形で覚えておくとよいでしょう．

次の式は，有名なので必ず知っておきましょう．これらの式をヒントに (3) は解いているのです．

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n \qquad (a,\ b) = (1,\ 1)$$

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^r{}_n\mathrm{C}_r + \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 0 \quad (a,\ b) = (1,\ -1)$$

【問題】

a, b は正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを証明せよ．

a, b は正の整数とする．$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを証明せよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

題意から $\dfrac{a}{b}<\sqrt{3}<\dfrac{a+3b}{a+b}$ または $\dfrac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\dfrac{a}{b}$ を示せばよい．

方針 で挙げたように考えるのが自然なのですが，これを証明するためには，どのように考えると最も簡単に示せるのでしょうか．これらの 2 式を変形すると，次のようになります．

$$\frac{a}{b}<\sqrt{3}<\frac{a+3b}{a+b} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{b}-\sqrt{3}<0 \\ \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}>0 \end{cases}$$

$$\frac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\frac{a}{b} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{b}-\sqrt{3}>0 \\ \dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}<0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$$

すなわち，$\left(\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$ が証明できればよいのです．このように，証明すべき式を自分で見つけてくるのが証明問題の一番のポイントになります．

ポイント

$$AB<0 \iff 「A>0 \text{ かつ } B<0」\text{または}「A<0 \text{ かつ } B>0」$$

♣　♠

解答

【証明】

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right) &= \frac{a-\sqrt{3}b}{b}\cdot\frac{a+3b-\sqrt{3}(a+b)}{a+b} \\ &= \frac{a-\sqrt{3}b}{b}\cdot\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)}{a+b} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}\end{aligned}$$

a, b は正の整数であるから，$a-\sqrt{3}b \neq 0$ である．よって，

$$\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}<0$$

となるので，$\left(\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)<0$ である．よって，$\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}$ は異符号であるから，
$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることが示された．　**（証明終）……（答）**

♢　♡

解説

証明を見ると簡単に感じてしまうかもしれませんが，アイデアが必要なので方法を知らなければ難しく感じるでしょう．ポイントにかいた不等式の変形はよく使う式変形なので，必ずマスターしておかなければいけません．この問題を一般化した問題が 1998 年に京都教育大学で出題されたことがあります．

問題 （'98 京都教育大）

a, b, n を自然数とするとき，$\dfrac{a}{b} \leqq \sqrt{n}$ ならば $\sqrt{n} \leqq \dfrac{a+nb}{a+b}$，$\dfrac{a}{b} \geqq \sqrt{n}$ ならば $\sqrt{n} \geqq \dfrac{a+nb}{a+b}$ であることを示せ．

内容的には同じであることがわかると思うので，実際に類題演習としてやってみるとよいでしょう．