$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC を考える．n を 2 以上の自然数とし，辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1} とする．A を P_0, B を P_n とおくとき，以下の問いに答えよ．

（1） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の半径を求めよ．

（2） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の面積の総和を S_n とする．

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと，$nS_n \leqq \dfrac{3\pi}{4}I_n$ となることを示せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

（3） 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC を考える．n を 2 以上の自然数とし，辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$ とする．A を P_0, B を P_n とおくとき，以下の問いに答えよ．

（1） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の半径を求めよ．

（2） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の面積の総和を S_n とする．

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと，$nS_n \leqq \dfrac{3\pi}{4}I_n$ となることを示せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ．

（3） 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n$ を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

(1) は，三角形の面積を利用して内接円の半径を求めます．(2) は，不等式を示すための式変形を工夫するのが難しいでしょう．(3) は，(2) の不等式を参考にはさみうちの原理を用いて求めることを考えます．

♣ ♠

解答

（1） 題意より，

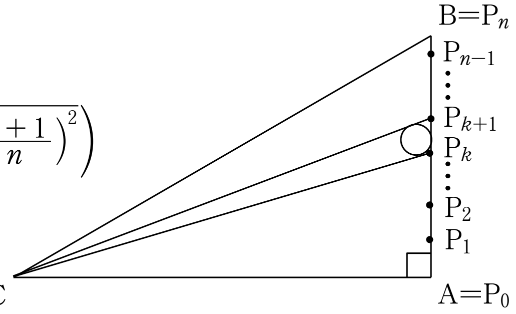
$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=\frac{1}{n},\quad \mathrm{P}_k\mathrm{C}=\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2},\quad \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C}=\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$$

であるから，内接円の半径を r_k とすると，

$$\triangle\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}=\frac{1}{2}r_k\left(\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}+\mathrm{P}_k\mathrm{C}+\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}r_k\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)$$

$$r_k=\frac{\sqrt{3}}{n\left(\dfrac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}\right)}$$



$$\therefore\quad \boldsymbol{r_k=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3n^2+k^2}+\sqrt{3n^2+(k+1)^2}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） **【証明】**

$S_k=\pi{r_k}^2$ より，

$$nS_n=\sum_{k=0}^{n-1}nS_k=\sum_{k=0}^{n-1}n\pi{r_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(\dfrac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}$$ ☞ **解説** ①

$$\leqq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(2\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}=\frac{3\pi}{4}I_n$$

ゆえに，示された．　　(証明終)

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{3+x^2}\,dx$ であるから，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$

より，

$$\int_0^1\frac{1}{3+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{18}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

(3)　(2) と同様にして nS_n を下から評価する．

$$nS_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}\ ☞\ \boxed{\text{解説}}\ ②$$

$$>\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}\ ☞\ \boxed{\text{解説}}\ ③$$

$$>\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}+2\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}I_n=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\pi=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi^2$$

である．したがって，この結果と (2) の結果よりはさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{24}\pi^2}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇　♡

解説

(1) では，一般に三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ が成り立つことを用いて求めます．$\angle\mathrm{P}_k\mathrm{AC}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，三平方の定理を用いれば，$\mathrm{P}_k\mathrm{C}$, $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C}$ を求めることができます．答えは，整理しましたが，(2) 以降の計算は問題文から考えると $\dfrac{k}{n}$ の形で式変形をする方がよいでしょう．

(2) では，不等式を証明する際の式変形が難しいでしょう．

① この式から次の式への式変形では，$\dfrac{k}{n}\leqq\dfrac{k+1}{n}$ であることと $\dfrac{1}{n}>0$ であることを用いて**分母が小さくなるように**式変形をしています．これによって分数全体は大きくなるので，解答のように I_n を導くことができます．

(3) では，(2) で示した不等式がヒントになります．方針でも述べたようにはさみうちの原理を用いて極限値を求めることは予想できますから，nS_n を下から評価する必要があります．そのために (2) での式変形をヒントにして nS_n より値が小さい式を導きます．

② この式から次の式への式変形では，(2) とは逆に $\dfrac{k}{n}\leqq\dfrac{k+1}{n}$ であることを用いて**分母が大きくなるように**式変形をしています．これによって分数全体は小さくなります．

③ さらに次の式への式変形では，$\dfrac{1}{n}$ に 1 より大きい数 $\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}$ をかけて分母をさらに大きくします．この式を選んだ理由は，次の式変形で因数分解ができるからです．試行錯誤で見つけないといけないため経験を積んで先を見る目を養っておく必要があります．

放物線 $C : y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $\ell : y = mx - m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

（1） 放物線 C と直線 ℓ が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

（2） $m > m_0$ とする．放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

（3） $m > m_0$ における $S_2 - 2S_1$ の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

放物線 $C : y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $\ell : y = mx - m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

（1） 放物線 C と直線 ℓ が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

（2） $m > m_0$ とする．放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

（3） $m > m_0$ における $S_2 - 2S_1$ の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

【テーマ】：面積の最小値

方針

(1) は放物線と直線が接するときを考えるので，判別式で求めます．(2) は放物線と直線の交点の x 座標を具体的に求めて面積を計算します．(3) は，面積の最小値なので，m を変数として考え微分します．

♣ ♠

解答

（1） 放物線 C と直線 ℓ が接するとき，

$$x^2 - 4x + 3 = mx - m \iff x^2 - (m+4)x + m + 3 = 0 \cdots\cdots ①$$

の判別式を D とすると，$D = 0$ であればよいので，

$$D = (m+4)^2 - 4(m+3) = 0 \iff (m+2)^2 = 0$$

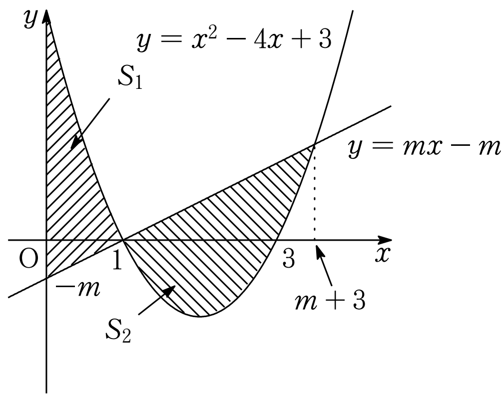
したがって，$m = -2$ であるから，$\boldsymbol{m_0 = -2}$……(答)

（2） $m > -2$ のとき，$D > 0$ であるから，放物線 C と直線 ℓ は異なる 2 点で交わる．① 式は，

$$(x-1)(x-m-3) = 0 \cdots\cdots (*)$$

と因数分解することができるので，放物線Cと直線ℓの交点の x 座標は，$x = 1,\ m+3$ である．したがって，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{(x^2 - 4x + 3) - (mx - m)\}\, dx \\ &= \int_0^1 \{x^2 - (m+4)x + m + 3\}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m+4}{2}x^2 + (m+3)x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{m+4}{2} + (m+3) \\ &= \boldsymbol{\frac{3m+8}{6}} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



である．また，

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^{m+3} \{(mx - m) - (x^2 - 4x + 3)\}\, dx \\ &= -\int_1^{m+3} (x-1)(x-m-3)\, dx \\ &= \frac{1}{6}(3 + m - 1)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+2)^3} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3) (2) より，

$$\begin{aligned} S_2-2S_1 &= \frac{1}{6}(m+2)^3-2\cdot\frac{3m+8}{6} \\ &= \frac{1}{6}(m^3+6m^2+12m+8)-m-\frac{8}{3} \\ &= \frac{1}{6}m^3+m^2+m-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

ここで，$f(m)=\dfrac{1}{6}m^3+m^2+m-\dfrac{4}{3}$ とおくと，

$$f'(m)=\frac{1}{2}m^2+2m+1=\frac{1}{2}(m^2+4m+2)$$

であるから，$f'(m)=0$ のとき，$m^2+4m+2=0$ すなわち $m=-2\pm\sqrt{2}$ である．$m>-2$ であることから，$\alpha=-2+\sqrt{2}$ とおくと，増減表は次のようになる．

m	-2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$		↘		↗

ゆえに，$f(m)$ は $m=\alpha$ のとき最小値をとる．$\alpha=-2+\sqrt{2}$ であるから，

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{6}(\alpha+2)^3-2\cdot\frac{3\alpha+8}{6} \\ &= \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{2+3\sqrt{2}}{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は，判別式を用いて求めましたが，① が $(x-1)(x-m-3)=0$ と因数分解できることがこの時点で分かっていれば，$m+3=1$ として $m=-2$ を得ることができます．(2) で放物線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求めなければいけないので，後で因数分解できることに気付いた人も多いかもしれません．

(2) は，面積を求めるため放物線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求めて積分計算を行います．S_1 は定積分の計算を教科書通りに実行すれば求められます．S_2 は放物線と直線で囲まれる図形の面積なので公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いましょう．

(3) は，S_2-2S_1 の最小値を求める問題で m が変数となります．そのため，$f(m)=S_2-2S_1$ として関数 $f(m)$ を定めて微分を利用して最大値を求めます．本問では，$f(m)=\dfrac{1}{6}(m+2)^3-2\cdot\dfrac{3m+8}{6}$ という式に $m=\alpha=-2+\sqrt{2}$ を代入すれば比較的計算が楽なので，$f(m)=\dfrac{1}{6}m^3+m^2+m-\dfrac{4}{3}$ に代入するより計算間違いは避けられるでしょう．闇雲に計算をするのではなく，効率よく計算できるように日頃から訓練しておきましょう．なお，このように代入する値が複雑な場合は，整式の除法を用いることで計算を簡単にすることもできます．

α は，$\alpha^2+4\alpha+2=0$ を満たすので，$f(\alpha)$ を $\alpha^2+4\alpha+2$ で割った商と余りを求めます．そうすると，次のように式変形できます．

$$f(\alpha)=(\alpha^2+4\alpha+2)\left(\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\alpha-2$$

$\alpha=-2+\sqrt{2}$ なので，$\alpha^2+4\alpha+2=0$ となるため，

$$f(\alpha)=\frac{2}{3}\alpha-2=\frac{2}{3}(-2+\sqrt{2})-2=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}$$

となります．

2 つの曲線 $C_1 : y = \log x$ および $C_2 : y = \sqrt{ax}$ を考える．ただし，a は正の定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） 曲線 C_1 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式，および曲線 C_2 上の点 $(s,\ \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ．ただし，$t > 0,\ s > 0$ である．

（2） 曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲を求めよ．

2 つの曲線 $C_1 : y = \log x$ および $C_2 : y = \sqrt{ax}$ を考える．ただし，a は正の定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式，および曲線 C_2 上の点 $(s,\ \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ．ただし，$t > 0,\ s > 0$ である．

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：共通接線が存在しない条件

方針

(1) は，曲線上の点における接線を求めるので，公式で処理できます．(2) では，$C_1,\ C_2$ の両方に接する直線が存在しない条件を求めるので，$\ell_1,\ \ell_2$ が一致しないときを考えましょう．

♣ ♠

解答

(1) $y = \log x$ において，$y' = \dfrac{1}{x}$ であるから，点 $(t,\ \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式は，

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t \iff \boldsymbol{\ell_1 : y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，$y = \sqrt{ax}$ において，$y' = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$ であるから，点 $(s,\ \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式は，

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}(x - s) + \sqrt{as} \iff \boldsymbol{\ell_2 : y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}x + \frac{\sqrt{as}}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線が存在しない条件は，ℓ_1 と ℓ_2 が一致しないときを考えればよいので，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}} & \cdots\cdots \text{①} \\ -1 + \log t = \dfrac{\sqrt{as}}{2} & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

を満たす正の実数 $s,\ t$ が存在しないときである．① より，$\sqrt{s} = \dfrac{\sqrt{a}t}{2}$ であるから，これを ② へ代入して，

$$-1 + \log t = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}t}{2} \iff \frac{4(-1 + \log t)}{t} = a$$

$f(t) = \dfrac{4(-1 + \log t)}{t}$ とおくとき，$y = f(t)$ のグラフと $y = a$ のグラフが共有点をもたないような実数 a の値の範囲を求めればよい．

$$f'(t) = \frac{4\left\{\frac{1}{t} \cdot t - (-1 + \log t)\right\}}{t^2} = \frac{4(2 - \log t)}{t^2}$$

$f'(t) = 0$ のとき，$t = e^2$ であるから，増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	(0)

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

$$\lim_{t \to +0} f(t) = -\infty$$

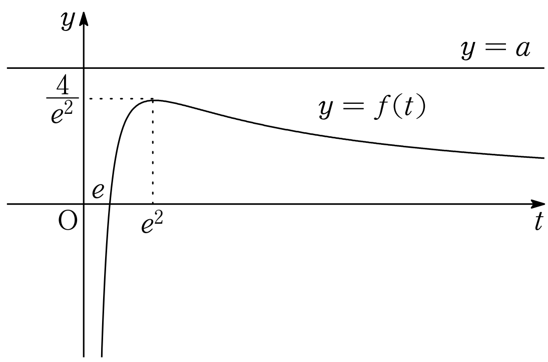
$$f(e^2) = \frac{4}{e^2}$$

よって，グラフは次のようになる．

ゆえに，C_1, C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a > \frac{4}{e^2}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

である．



解説

(1) は基本問題です．計算間違いに気をつけて完答しましょう．(2) では，両方の曲線に接する直線が存在しないということは，ℓ_1 と ℓ_2 が一致しないことであるという部分に気付くことがポイントとなります．また，そのための条件は，ℓ_1, ℓ_2 が一致するとして ①, ② 式を作り，この 2 式が成り立たない，すなわちこの 2 式を満たす実数 s, t が存在しないときであると考えます．あとは，定数分離をしてグラフを用いて a の値の範囲を求めればよいという流れになります．

解答中にある極限計算が疑問に思う人もいると思いますが，次のような考えから求めています．

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{4(-1+\log t)}{t}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形をした不定形です．本来ならば不等式を作ってはさみうちの原理で極限を計算しますが，ここでは無限大の order，簡単にいうと無限大の大きさを考えて極限を計算しようということです．

$$\underbrace{\log x}_{\text{対数関数}} \ll \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{無理関数}} \ll \underbrace{x^a}_{\text{多項式関数}} \ll \underbrace{a^x}_{\text{指数関数}} \quad (x \to +\infty)$$

$x \ll y$ は x が y に比べてものすごく小さいことを表しています．すなわち $\log t \ll t$ なので，分母の無限大の方が大きいことがわかります．したがって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{4(-1+\log t)}{t}=0$ となります．一方で，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{4(-1+\log t)}{t}$ は不定形の形ではありませんから，そのまま極限の計算をすることができます．

$$\lim_{t\to+0}\frac{4(-1+\log t)}{t}=\lim_{t\to+0}\underbrace{\frac{4}{t}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(-1+\log t)}_{\to-\infty}=-\infty$$

n を自然数とする．1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ．

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ．

(3) $n = 4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ．

n を自然数とする．1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ．

(2)　n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ．

(3)　$n=4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

(1), (2) は，$A+B$ を考えることで証明をすることができます．背理法を使っても構いません．(3) は，$A=B$ の値を求めることができるので，場合をすべて書き出せば求められます．もらさないように数えることが大切です．

解答

(1)　**【証明】**

1 から $2n$ までの数の和が $A+B$ となるので，

$$A+B=\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1)\cdots\cdots ①$$

である．n が奇数のとき，① より，$n(2n+1)$ は奇数となる．$A+B=$（奇数）となるので，A と B の偶奇は異なるので，A と B は等しくない．　**証明終**

(2)　**【証明】**

n が偶数のとき，① より，$n(2n+1)$ は偶数となる．$A+B=$（偶数）となるので，A と B の偶奇は一致するので，A と B の差は偶数となる．　**証明終**

(3)　$n=4$ のとき，1〜8 までの数の和は，① より，

$$A+B=4\cdot(2\cdot 4+1)=36$$

であるから，$A=B$ となるとき，$A=B=18$ である．このとき，4 数の和が 18 となる組合せは，

$$\{(1,2,7,8),(3,4,5,6)\},\ \{(1,3,6,8),(2,4,5,7)\},$$

$$\{(1,4,5,8),(2,3,6,7)\},\ \{(1,4,6,7),(2,3,5,8)\}$$

の 4 通りがあり，A, B への対応を考えると $4\times 2=8$（通り）がある．全事象は，${}_8C_4=70$(通り）であるから，求める確率は，

$$\frac{8}{70}=\boldsymbol{\frac{4}{35}}\cdots\cdots\text{(答)}$$

解説

(1), (2) は証明方法に迷うかもしれませんが，ポイントは $A+B$ が偶数か奇数かというところにあります．方針さえ定まれば完答は難しくないので，差がつく問題といえるかもしれません．(3) は，もれなく場合を求めることがで

きるかがポイントとなります．大切なのは，やみくもに探すのではなく自分なりの規則を決めて探すことです．4 つずつの数に分けるのですから，和が 18 となる数の組が 1 つ見つかれば残った数の和も当然 18 となります．したがって，和が 18 となる数の組をすべて見つければよいのです．解答では，(1, 2, 7, 8) を見つけて 2 を 1 つ大きくし，7 を 1 つ小さくして (1, 3, 6, 8) を求めています．これは，4 数の和を一定にするためにこのような方法で探しています．これと同じ要領で，残り 2 つを求めれば，もれなく探せるでしょう．

複素数平面において，点 P(z) を原点 O のまわりに θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ だけ回転し，さらに点 E(1) のまわりに θ だけ回転した点を Q(w) とする．このとき，点 Q(w) は点 P(z) をある点 A(α) のまわりに 2θ だけ回転した点と一致する．ただし，回転はすべて反時計まわりとする．複素数 γ を

$$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$$

とする．

(1) 複素数 w を z と γ を用いて表せ．

(2) 複素数 α を γ を用いて表せ．

(3) 三角形 OEA が正三角形となるような θ の値を求めよ．

複素数平面において，点 P(z) を原点 O のまわりに θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) だけ回転し，さらに点 E(1) のまわりに θ だけ回転した点を Q(w) とする．このとき，点 Q(w) は点 P(z) をある点 A(α) のまわりに 2θ だけ回転した点と一致する．ただし，回転はすべて反時計まわりとする．複素数 γ を

$$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$$

とする．

(1) 複素数 w を z と γ を用いて表せ．

(2) 複素数 α を γ を用いて表せ．

(3) 三角形 OEA が正三角形となるような θ の値を求めよ．

【テーマ】：複素数の図形への応用

方針

複素数 z を原点のまわりに θ 回転させる場合は $\cos\theta + i\sin\theta$ をかければよいので，点 1 のまわりに θ 回転させる場合は $z-1$ に $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけて再び実軸方向に 1 平行移動させれば求められます．

♣ ♠

解答

(1) 点 P(z) を原点 O のまわりに θ だけ回転すると，

$$z(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．さらに，点 E(1) のまわりに θ だけ回転した点を Q(w) とするので，

$$\begin{aligned} w &= \{z(\cos\theta + i\sin\theta) - 1\}(\cos\theta + i\sin\theta) + 1 \\ &= z(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta) + 1 \end{aligned}$$

一方，$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$ であるから，$\boldsymbol{w = z\gamma^2 - \gamma + 1}$……(答)

(2) 題意より，

$$\begin{aligned} w - \alpha &= (z-\alpha)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (z-\alpha)\gamma^2 \end{aligned}$$

であるから，$w - z\gamma^2 = \alpha - \alpha\gamma^2$ である．また，(1) の結果を用いると，

$$-\gamma + 1 = \alpha - \alpha\gamma^2$$

$$(1-\gamma) = \alpha(1-\gamma)(1+\gamma)$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから，$\gamma \neq \pm 1$ である．したがって，

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}}$$ ……(答)

(3)　△OEA が正三角形となるのは，右図より

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

となるときである．(2) より，

$$\gamma + 1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\gamma = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}} - 1$$

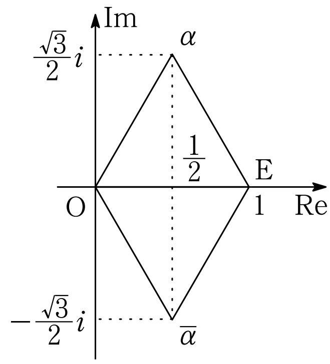
$$\gamma = \overline{\alpha} - 1 \quad (\because \ \alpha\overline{\alpha} = 1)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{（複号同順）}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120° + i\sin 120°$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{\theta = 120°}$……(**答**)



◇　♡

解説

γ は原点のまわりに θ だけ回転する回転移動を表す複素数です．したがって，これをかけることで複素数平面上の点は，原点のまわりに θ だけ回転移動します．点 z を原点以外の点 β のまわりに回転移動する場合は，これを応用します．回転の中心を原点へ平行移動するため β を引きます．そして γ をかけて回転させ再び β を加えて平行移動すれば

$$(z - \beta)\gamma + \beta$$

となり，これが点 β のまわりに θ だけ回転移動した先の複素数を表すことになります．

(3) は，図形的な解釈をすることで α を求めることができます．α が求まれば (2) の結果を用いて γ が求められるので θ を求めることができます．

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ．

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ．

【テーマ】：複素数の基本計算

方針

求める複素数を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおいて，r,θ を求める方法と，複素数 $z+\dfrac{4}{z}$ が実数であるという条件を用いて等式を作り直接 z を求める方法があります．

♣ ♠

解答

求める複素数 z を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{z} &= \frac{4}{r}\cdot\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta-i^2\sin^2\theta}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\quad(\because\ i^2=-1)\\
&= \frac{4}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)
\end{aligned}
$$

である．したがって，

$$z+\frac{4}{z}=\left(r\cos\theta+\frac{4}{r}\cos\theta\right)+i\left(r\sin\theta-\frac{4}{r}\sin\theta\right)$$

となる．これが実数であることから，

$$r\sin\theta-\frac{4}{r}\sin\theta=0\iff\sin\theta\left(r-\frac{4}{r}\right)=0$$

すなわち，$\sin\theta=0$ または $r=\dfrac{4}{r}$ であるから，$r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=0,\pi$ または $r=2$ である．

(i) $\theta=0$ のとき，

$z=r$ より，$|z-2|=2\iff|r-2|=2\iff r-2=\pm2$

$r>0$ より，$r=4$

(ii) $\theta=\pi$ のとき，

$z=-r$ より，$|z-2|=2\iff|-r-2|=2\iff r+2=\pm2$

$r>0$ より，不適．

(iii) $r=2$ のとき，

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，

$$
\begin{aligned}
|z-2|=2 &\iff |2(\cos\theta+i\sin\theta)-2|=2\\
&\iff |\cos\theta+i\sin\theta-1|=1\\
&\iff |(\cos\theta-1)+i\sin\theta|^2=1\\
&\iff (\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=1
\end{aligned}
$$

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = 1 \iff \cos\theta = \frac{1}{2}$$

このとき，$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$z = 2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 \pm \sqrt{3}i$

以上より，求める複素数 z は，

$$\boldsymbol{z = 4,\ 1 \pm \sqrt{3}i} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

別解

$z + \frac{4}{z}$ は実数であるから，

$$z + \frac{4}{z} = \overline{z + \frac{4}{z}} = \overline{z} + \frac{4}{\overline{z}}$$

が成り立つので，これを変形すると，

$$z \cdot z\overline{z} + 4\overline{z} = \overline{z} \cdot z\overline{z} + 4z$$

$$z \cdot |z|^2 + 4\overline{z} = \overline{z} \cdot |z|^2 + 4z \iff |z|^2(z - \overline{z}) - 4(z - \overline{z}) = 0 \iff \left(|z|^2 - 4\right)(z - \overline{z}) = 0$$

ゆえに，$|z|^2 = 4$ または $z = \overline{z}$ である．

(i) $|z|^2 = 4$ のときは，$|z| > 0$ なので $|z| = 2$ である．ここで，$|z - 2| = 2$ であるから，両辺を 2 乗して $|z - 2|^2 = 4$ を得るので，

$$(z - 2)(\overline{z - 2}) = 4 \iff (z - 2)(\overline{z} - 2) = 4 \iff z\overline{z} - 2(z + \overline{z}) = 0$$

であり，$z\overline{z} = |z|^2 = 4$ であるから，

$$z + \overline{z} = 2 \text{ かつ } z\overline{z} = 4$$

を得る．ゆえに，$z, \overline{z}$ を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

であり，その解は $x = 1 \pm \sqrt{3}i$ であるから，

$$z = 1 \pm \sqrt{3}i$$

である．

(ii) $z = \overline{z}$ のときは，z は実数であるから，$|z - 2| = 2$ より，

$$z - 2 = \pm 2 \iff z = 0,\ 4$$

を得るが，$z \neq 0$ であるから，$z = 4$ である．

以上より，求める複素数 z は，

$$\boldsymbol{z = 4,\ 1 \pm \sqrt{3}i} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

解説

様々な方針が考えられる問題です．もちろん $z = a + bi$ とおいて，$z + \frac{4}{z}$ を計算し，それが実数となるための a, b の条件を求めるという方針でも解くことができます．様々な解法を知ることで応用力が身につき多くの問題に対応できるようになるので，別解の研究にも力を入れるとよいでしょう．

点 O を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおき，零ベクトルを $\vec{0}$ と書くとき，$\vec{a} + 2\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$ という関係がある．ただし，$1 < t < 3$ とする．

（1） 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を t を用いて表せ．

（2） $\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，三角形 ABC の面積を求めよ．

点 O を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，零ベクトルを $\vec{0}$ と書くとき，$\vec{a}+2\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ という関係がある．ただし，$1<t<3$ とする．

（1） 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を t を用いて表せ．

（2） $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，三角形 ABC の面積を求めよ．

【テーマ】：内積の計算

方針

与えられた等式を変形して両辺の大きさの 2 乗を計算すると内積が得られます．

解答

（1） $\vec{a}+2\vec{b}=-t\vec{c}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=t^2\left|\vec{c}\right|^2$$

$$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=t^2\quad\left(\because\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{t^2-5}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$2\vec{b}+t\vec{c}=-\vec{a}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$4\left|\vec{b}\right|^2+4t\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2$$

$$4+4t\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2=1$$

$t\neq 0$ より，

$$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{-t^2-3}{4t}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$\vec{a}+t\vec{c}=-2\vec{b}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2\left|\vec{c}\right|^2=4\left|\vec{b}\right|^2$$

$$1+2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2=4$$

$t\neq 0$ より，

$$\boldsymbol{\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{-t^2+3}{2t}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから，(1) より，

$$t=\pm\sqrt{3}$$

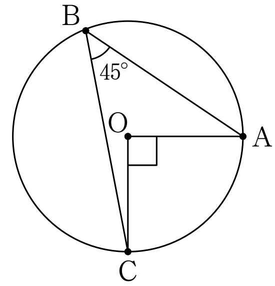
$1<t<3$ より，$t=\sqrt{3}$ である．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2$$

$$=1-2\cdot\frac{-2}{4}+1=3$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|>0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3}$ である．



同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \left|\vec{b}\right|^2 = 1 - 2\cdot\frac{-6}{4\sqrt{3}} + 1 = 2 + \sqrt{3}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| > 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ である．

ゆえに，求める三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

（1）は，与えられた条件式から内積を求める基本問題です．どれか 1 つの項を右辺に移項して大きさの 2 乗を計算すれば内積が得られるので完答しましょう．

（2）は，三角形の面積を求めるので，どの公式を利用するかがポイントとなります．∠ABC の大きさがわかっているので，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\sin\angle\mathrm{ABC}$ を用いて計算をしています．

中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ．

中心 $(0, a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ．

【テーマ】：曲線の長さ

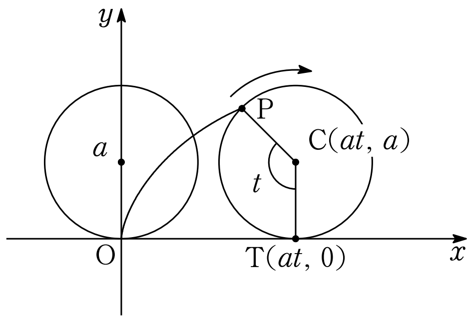
方針

(1) は，ベクトルを用いて点 P の座標を求めると楽に求められます．(2) 以降は，公式に当てはめて計算しましょう．

♣ ♠

解答

(1) 移動後の円の中心を C，円と x 軸の接点を T とすると，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから，



$\mathrm{C}(at, a)$, $\mathrm{T}(at, 0)$ となる．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \left(a\cos\left(\frac{3}{2}\pi - t\right),\ a\sin\left(\frac{3}{2}\pi - t\right)\right) = (-a\sin t,\ -a\cos t)$$

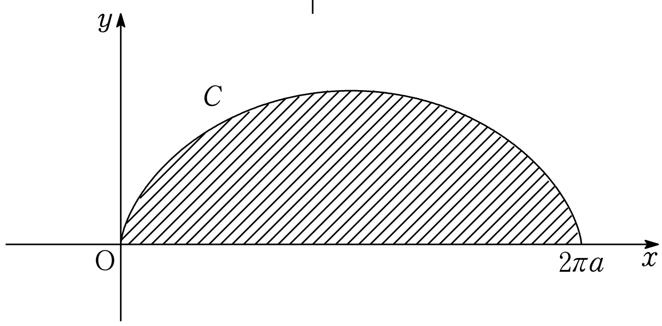
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = (at - a\sin t,\ a - a\cos t)$$

となる．したがって，

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{at - a\sin t,\ a - a\cos t})\cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) 求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

である．(1) より，$x = at - a\sin t$ であるから，$dx = (a - a\cos t)dt$ であり，x と t の対応関係は，下表のようになる．また，$y = a - a\cos t$ であるから，S は次のようになる．

x	0	→	$2\pi a$
t	0	→	2π

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}(a - a\cos t)(a - a\cos t)\,dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{3\pi a^2}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)　求める曲線 C の長さを L とすると，

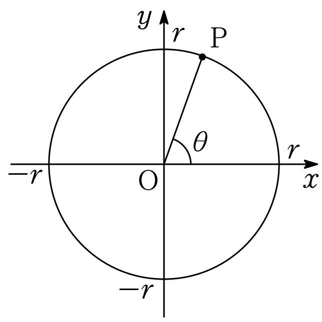
$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2-2\cos t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt \quad \left(\because\ \ \sin\frac{t}{2} \geqq 0\right) \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 2a(2+2) = \boldsymbol{8a}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

◇　♡

解説

頻出テーマであるサイクロイドに関する問題です．与えられた問題文を読んで，サイクロイドであることがわかった人は，この辺りの分野がよく勉強できています．(1) ができないと全滅する問題なので経験があるかないかが結果を左右したのではないでしょうか？



(1) は，ベクトルを用いるとスッキリと解答できます．ポイントは，半径 r の円周上の点 P は，円の中心を O とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ と表されることです．ここでの θ は，x 軸の正の方向とのなす角を表しています．ベクトルは，始点の位置に関係ないので，円の中心がどこにあろうがこの式は成り立ちます．これがベクトルを利用する最大の理由です．

(2) は，面積の公式を利用しますが，曲線 C が媒介変数表示されているため置換積分法を利用します．ここで，間違えてはいけないのは積分区間は積分変数と対応しているということです．面積の公式を用いると $\displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ となりますが，この時点では積分区間は x の範囲です．置換積分をした後は，積分区間は t の範囲になりますから，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ になります．よく見かける間違いは，積分区間と積分変数がごちゃ混ぜになって，$\displaystyle\int_0^{2\pi} y\,dx$ となっているものです．

(3) は，以下の公式を用いて計算します．

【曲線の長さの公式】

(i)　陽関数の曲線 …… 曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は，

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(ii)　媒介変数表示の曲線 …… 曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は，

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

次の問いに答えよ.

（1） 次の式が成り立つことを示せ.

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

（2） 自然数 n に対して,

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\sin\theta=\sin(2n+1)\theta-\sin\theta$$

が成り立つことを示せ.

（3） 自然数 n に対して,

$$\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

が成り立つことを示せ.

次の問いに答えよ.

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

(2) 自然数 n に対して,

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\sin\theta=\sin(2n+1)\theta-\sin\theta$$

が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して,

$$\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

が成り立つことを示せ.

【テーマ】:加法定理の応用

方針

(1) は和積の公式を証明するため,加法定理を用います.(2) は (1) を,(3) は (2) を利用することを考えます.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

加法定理より,

$$\begin{array}{rr} & \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ -) & \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \hline & \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \end{array}$$

よって,示された. **(証明終)**

(2) (1) において,$\alpha=2k\theta$,$\beta=\theta$ とおくと,

$$\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta=2\cos 2k\theta\sin\theta$$

となるので,$k=1, 2, \cdots\cdots, n$ として辺々加えると,

$$\begin{array}{rr} & \sin 3\theta-\sin\theta=2\cos 2\cdot1\cdot\theta\sin\theta \\ & \sin 5\theta-\sin 3\theta=2\cos 2\cdot2\cdot\theta\sin\theta \\ & \sin 7\theta-\sin 5\theta=2\cos 2\cdot3\cdot\theta\sin\theta \\ & \vdots \quad = \quad \vdots \\ +) & \sin(2n+1)\theta-\sin(2n-1)\theta=2\cos 2\cdot n\cdot\theta\sin\theta \\ \hline & \sin(2n+1)\theta-\sin\theta=2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\sin\theta \end{array}$$

よって,示された. **(証明終)**

(3) (2) で示した等式において，$\theta=\dfrac{\pi}{4n}$ とすると，

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}&=\sin\frac{(2n+1)\pi}{4n}-\sin\frac{\pi}{4n}\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\\&=\cos\frac{\pi}{4n}-\sin\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

となる．両辺を $\sin\dfrac{\pi}{4n}\fallingdotseq 0$ で割ると，

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}-1 \iff 2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1$$

したがって，

$$\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

となり，示された．　**(証明終)**

解説

(1) は，加法定理を用いれば容易に示せる問題なので，完答できるようにしておかなければいけない問題です．和積の公式は暗記するよりもこのようにして求められるようになっておく方が応用が効いてよいでしょう．

(2) は，(1) において，α, β を適当に決める必要がありますが，ポイントは $\sum$ の部分で，$\cos 2k\theta\sin\theta$ となっているところに着目すれば，$\alpha=2k\theta$, $\beta=\theta$ という置換に気付けます．

(3) は，(2) の式を用いますが，今度は θ に何を代入すればよいかを考えます．ポイントは，(2) と同様 $\sum$ の部分で $\cos\dfrac{k\pi}{2n}$ となっているところに着目すれば，$2k\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4n}$ となります．証明すべき式から逆算して方針を立てることは証明問題では非常に大切な考え方です．

p, q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 n に対し，有理数 a_n, b_n を

$$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$$

によって定める．

（1） $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ．

p, q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 n に対し，有理数 a_n, b_n を

$$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$$

によって定める．

(1) $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，まず数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関する漸化式を導いておきます．自然数 n に関する証明なので数学的帰納法を用いて示します．(2) は，与えられた漸化式と (1) の結果から a_n, b_n が具体的に求められるので，$\dfrac{a_n}{b_n}$ を求めて極限を計算します．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$ …… ①

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{q} &= (p+\sqrt{q})^{n+1} \\ &= (p+\sqrt{q})(p+\sqrt{q})^n \\ &= (p+\sqrt{q})(a_n+b_n\sqrt{q}) \quad (\because\ ①) \\ &= (pa_n+qb_n)+(a_n+pb_n)\sqrt{q} \end{aligned}$$

自然数 n に対して，a_n, b_n は有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots ② \\ b_{n+1} = a_n + pb_n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ。① において $n=1$ とすると，

$$p+\sqrt{q} = a_1 + b_1\sqrt{q}$$

であるから，同様にして $a_1 = p, b_1 = 1$ を得る。

$(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ …… ④

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき，

(左辺) $= p-\sqrt{q}$

(右辺) $= a_1 - b_1\sqrt{q} = p-\sqrt{q}$

よって，$n=1$ のとき成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，

$(p-\sqrt{q})^k = a_k - b_k\sqrt{q}$ …… ⑤

が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}(p-\sqrt{q})^{k+1} &= (p-\sqrt{q})(p-\sqrt{q})^k \\ &= (p-\sqrt{q})(a_k-b_k\sqrt{q}) \quad (\because\ ⑤) \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{q} \quad (\because\ ②, ③)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より，すべての自然数 n について ④ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2) **【証明】**

① + ④ より，

$$2a_n = (p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n$$

$$a_n = \frac{(p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n}{2}$$

① − ④ より，

$$2b_n\sqrt{q} = (p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n$$

$$b_n = \frac{(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n}{2\sqrt{q}}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\dfrac{(p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n}{2}}{\dfrac{(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n}{2\sqrt{q}}} \\ &= \sqrt{q}\cdot\frac{(p+\sqrt{q})^n + (p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n - (p-\sqrt{q})^n} \\ &= \sqrt{q}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right| < 1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$$

となり，示された。 **(証明終)**

◇ ♡

解説

(1) は，別の方法でも証明できます．漸化式を作るところまでは同じですが，その漸化式から

$$a_{n+1}{}^2 - qb_{n+1}{}^2 = (p^2-q)(a_n{}^2 - qb_n{}^2)$$

が成り立つことを用いて，$a_n{}^2 - qb_n{}^2 = (p^2-q)^n$ であることを導きます．その後は，

$$(p-\sqrt{q})^n = \left(\frac{p^2-q}{p+\sqrt{q}}\right)^n = \frac{a_n{}^2 - qb_n{}^2}{a_n + b_n\sqrt{q}} = a_n - b_n\sqrt{q}$$

となるので，示されます．

(2) は，具体的に a_n, b_n を求めて，$\left|\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right| < 1$ であることに注意すれば極限は求められます．

a を正の実数とし，2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える．

（1） C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．

（2） 2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

a を正の実数とし，2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える．

（1） C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．

（2） 2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

【テーマ】：共通接線

方針

C_1 の接線と C_2 の接線が一致すると考えます．

♣ ♠

解答

（1） C_1 について，$y' = 2x$ より C_1 上の点 (s, s^2) における接線の方程式は，

$$y = 2s(x - s) + s^2 \iff y = 2sx - s^2 \cdots\cdots ①$$

C_2 について，$y' = 2x - 4a$ より C_2 上の点 $(t, t^2 - 4at + 4a)$ における接線の方程式は，

$$y = (2t - 4a)(x - t) + t^2 - 4at + 4a \iff y = (2t - 4a)x - t^2 + 4a \cdots\cdots ②$$

である．① と ② が任意の x に対して一致すればよいので，

$$\begin{cases} 2s = 2t - 4a & \cdots\cdots ③ \\ -s^2 = -t^2 + 4a & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

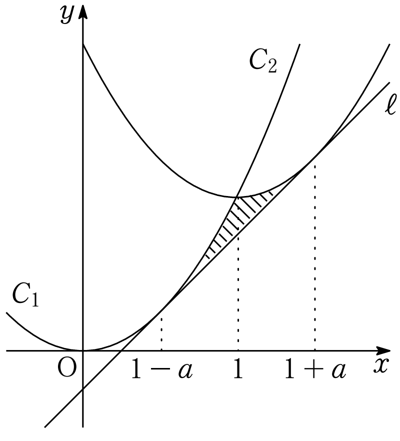
を得る．③ より，$s = t - 2a$ であるから，④ へ代入して，

$$-(t - 2a)^2 = -t^2 + 4a \iff t = a + 1$$

このとき，$s = -a + 1$ である．よって，② から求める共通接線の方程式は，

$$y = (-2a + 2)x - (a + 1)^2 + 4a \iff \boldsymbol{y = (-2a + 2)x - (a - 1)^2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） （1）より，グラフは右図のようになるので，求める面積は図の斜線部分である．求める面積を S とすると，



$$\begin{aligned} S &= \int_{1-a}^{1} \{x^2 + 2(a-1)x + (a-1)^2\}\,dx \\ &\quad + \int_{1}^{1+a} \{x^2 - 4ax + 4a - (-2a+2)x + (a-1)^2\}\,dx \\ &= \int_{1-a}^{1} (x + a - 1)^2\,dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1+a)\}^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + a - 1)^3\right]_{1-a}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x - 1 - a)^3\right]_{1}^{1+a} \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 0 + 0 - \frac{1}{3}(-a)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

♢ ♡

解説

共通接線の問題は，2 つのタイプがあります．1 つは，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接しているというものです．この場合，$x=t$ における微分係数が等しくかつこの点を共有しているため

$$\begin{cases} f'(t)=g'(t) \\ f(t)=g(t) \end{cases}$$

を満たせば十分です．もう 1 つは，本問のように 2 つの曲線は接していませんが，1 本の接線が 2 つの曲線と異なる接点で接するというものです．この場合，本問の解答にあるように，互いの接線が一致するという条件から連立方程式を作って解きます．

(2) は，放物線と接線で囲まれる部分の面積ですから，

$$\int (x+a)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+a)^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

という式を用いて計算すると楽に計算できます．接線なので必ず $(x+a)^2$ という形が作れるということを理解しておかなければいけません．

2 つの整式 $f(x) = x^2 + bx + c$ と $g(x) = x^2 + x + 1$ について，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りと $f(x^2)$ を $g(x)$ で割ったときの余りが一致し，さらに $f(x^3)$ は $g(x)$ で割り切れるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，b, c は実数の定数とする．

（1） α が 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解のとき，α^3 の値を求めよ．

（2） b, c の値を求めよ．

（3） $g(x^3)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

2 つの整式 $f(x) = x^2 + bx + c$ と $g(x) = x^2 + x + 1$ について，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りと $f(x^2)$ を $g(x)$ で割ったときの余りが一致し，さらに $f(x^3)$ は $g(x)$ で割り切れるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，b, c は実数の定数とする．

(1)　α が 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解のとき，α^3 の値を求めよ．

(2)　b, c の値を求めよ．

(3)　$g(x^3)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

【テーマ】：対称式の計算

方針

(1) は，$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ という因数分解の公式を利用します．(2) は，題意に与えられている条件から 2 つの式を作ります．(3) は，$f(x)$ が因数分解できることを用いて解きます．

♣　♠

解答

(1)　題意より，$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ を満たし，

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

であるから，$\alpha^3 - 1 = 0$ を得る．ゆえに，$\alpha^3 = \mathbf{1}$……(答)

(2)　$f(x) = (x^2 + x + 1) + (b-1)x + c - 1$ と表せるので，$f(x)$ を $g(x)$ で割った余りは $(b-1)x + c - 1$ である．また，

$$f(x^2) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + b) + (1-b)x + c - b$$

より，$f(x^2)$ を $g(x)$ で割った余りは，$(1-b)x + c - b$ となる．ゆえに，

$$(b-1)x + c - 1 = (1-b)x + c - b$$

がすべての x で成り立つための条件は，

$$\begin{cases} b - 1 = 1 - b \\ c - 1 = c - b \end{cases}$$

これを解いて $b = 1$，c は任意となる．さらに，$f(x^3)$ は $g(x)$ で割り切れるので，$f(\alpha^3) = 0$ となる．

したがって，

$$f(\alpha^3) = \alpha^6 + b\alpha^3 + c = 0 \iff 1 + b + c = 0$$

$b = 1$ より $c = -2$ を得る．ゆえに，求める b, c の値は，

$$\boldsymbol{b = 1, c = -2}……(答)$$

(3)　(2) より，$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ である．

よって，$g(x^3)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px + q$ とすると，

$$g(x^3) = (x+2)(x-1)Q(x) + px + q$$

この式に，$x = -2, 1$ を代入すると，

$$\begin{cases} g((-2)^3) = -2p + q \\ g(1^3) = p + q \end{cases} \iff \begin{cases} -2p + q = 57 \\ p + q = 3 \end{cases}$$

これを解いて，$p=-18,\ q=21$ を得るので，求める余りは，

$-18x+21$……(答)

◇ ♡

解説

整式に関する問題は不慣れな人が多いかもしれませんが，商や余りを設定して式を作ることが基本です．特に，割る式が 1 次式のときには剰余の定理が使えるので，剰余の定理もあわせて復習をしておきましょう．また，整式 $A(x)$ を整式 $B(x)$ で割ったときの商が $Q(x)$ で，余りが $R(x)$ であるとき，

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

が成り立つことも重要です．

【因数定理】

整式 $P(x)$ について，$P(a)=0$ のとき，$P(x)$ は $x-a$ を因数にもつ．

【剰余の定理】

整式 $P(x)$ を $ax+b$ ($a \fallingdotseq 0$) で割ったときの余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である．

$1 < a < b$ とする．原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ で囲まれた部分を R とする．R の面積を E, R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．

(1) E を a と b の式で表せ．

(2) $c > 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする．線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ．

(3) V を a と b の式で表せ．

(4) $b = a + 1$ のとき $\lim_{a \to \infty} E$，$\lim_{a \to \infty} V$ を求めよ．

$1 < a < b$ とする．原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ で囲まれた部分を R とする．R の面積を E, R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．

(1)　E を a と b の式で表せ．

(2)　$c > 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする．線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ．

(3)　V を a と b の式で表せ．

(4)　$b = a + 1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty} E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V$ を求めよ．

【テーマ】：斜軸回転体の体積

方針

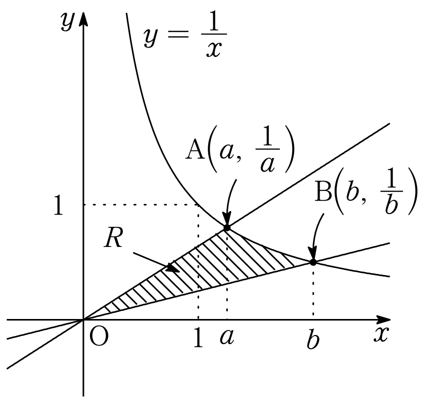
(1) は，三角形の面積を利用します．(2) は，点と直線の距離を利用します．(3) は，(1) の面積計算と同様な考え方で円錐の体積を利用して求めます．

♣　♠

解答

(1)　C$(a,\ 0)$, D$(b,\ 0)$ とすると，右図より，

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b \frac{1}{x}\,dx + \triangle\mathrm{OAC} - \triangle\mathrm{OBD} \\
&= \Big[\log|x|\Big]_a^b + \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{b} \\
&= \log b - \log a = \boldsymbol{\log\frac{b}{a}} \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$



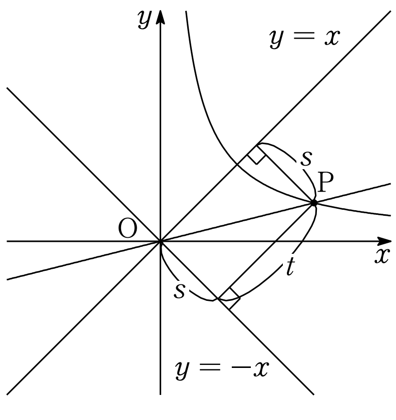
(2)　**【証明】**

題意より，s は点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ と直線 $y = x$ との距離に等しいので，

$$
s = \frac{\left|c - \frac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|c - \frac{1}{c}\right|
$$

また，t **は点** $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ **と直線** $y = -x$ **との距離に等しいので，**

$$
t = \frac{\left|c + \frac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|c + \frac{1}{c}\right|
$$



ゆえに，

$$
\begin{aligned}
t^2 - s^2 &= \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{2}\left(c^2 - 2 + \frac{1}{c^2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

であり，$t^2 = s^2 + 2$ **が示された．**　（証明終）

(3)　$c=a$ **のときの** s **の値を** α, $c=b$ **のときの** s **の値を** β **とすると，**

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

である．このとき，

$$V=\underbrace{\int_\alpha^\beta \pi t^2\,ds}_{\substack{\text{曲線 AB を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体の体積}}}+\underbrace{\frac{1}{3}\pi(\alpha^2+2)\alpha}_{\substack{\text{線分 OA を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体（円錐）の体積}}}-\underbrace{\frac{1}{3}\pi(\beta^2+2)\beta}_{\substack{\text{線分 OB を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体（円錐）の体積}}}$$

$$\begin{aligned}
&=\int_\alpha^\beta \pi(s^2+2)\,ds+\frac{\pi}{3}\{\alpha^3-\beta^3+2(\alpha-\beta)\}\\
&=\pi\left[\frac{1}{3}s^3+2s\right]_\alpha^\beta+\frac{\pi}{3}\{\alpha^3-\beta^3+2(\alpha-\beta)\}\\
&=\frac{\pi}{3}(\beta^3-\alpha^3)+2\pi(\beta-\alpha)-\frac{\pi}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{2\pi}{3}(\beta-\alpha)\\
&=\frac{4\pi}{3}(\beta-\alpha)\\
&=\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(b-a-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(4)　$b=a+1$ **のとき，** $E=\log\dfrac{a+1}{a}$ **であるから，**

$$\lim_{a\to\infty}E=\lim_{a\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{a}\right)=\log 1=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})$$

また，

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}V&=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(a+1-a-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)\\
&=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

◇　　　　♡

解説

面積の計算は，三角形を利用して，全体から不要な部分を取り除くという手法で計算します．(2) は (3) で体積を計算するためのヒントです． $y=-x$ **が回転軸なので，原点からの距離を変数として積分しなければいけません．もちろん** t **が半径になります．(3) の体積計算は，(1) の面積計算と同様に円錐を利用して，全体から不要な部分を取り除いて求めます．**

$a_1 = 1,\ a_2 = 6$ **ならびに** $2(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_{n+2} + 4(n+2)a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **で定義される数列** $\{a_n\}$ **について，次の問いに答えよ．**

（1） $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ **とおくとき，** b_n **を** n **の式で表せ．**

（2） a_n **を** n **の式で表せ．**

（3） **初項から第** n **項までの和** $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ **を求めよ．**

$a_1 = 1,\ a_2 = 6$ ならびに $2(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_{n+2} + 4(n+2)a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(3) 初項から第 n 項までの和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

【テーマ】：隣接３項間漸化式

方針

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくので，数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式を導きます．(2) では，(1) で導いた漸化式を解きます．(3) は（等差数列）×（等比数列）の和を求める計算方法を考えますが，2 回やらないと答えが得られません．

♣ ♠

解答

(1) $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくとき，$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$ であるから，これを与式へ代入して，

$$\begin{aligned}2(2n+3)a_{n+1} &= (n+1)(b_{n+1} + 2a_{n+1}) + 4(n+2)a_n \\ &= (n+1)b_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + 4(n+2)a_n \\ (n+1)b_{n+1} &= 2(n+2)a_{n+1} - 4(n+2)a_n \\ &= 2(n+2)(a_{n+1} - 2a_n) \\ &= 2(n+2)b_n\end{aligned}$$

両辺を $(n+2)(n+1) \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{n+2} = 2 \cdot \frac{b_n}{n+1}$$

であるから，$c_n = \dfrac{b_n}{n+1}$ とおくと，

$$c_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{a_2 - 2a_1}{2} = 2,\quad c_{n+1} = 2c_n$$

となるので，数列 $\{c_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列である．したがって，

$$c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

より，$\boldsymbol{b_n = (n+1)2^n}$……(答)

(2) (1) より，$a_{n+1} - 2a_n = (n+1)2^n$ であるから，両辺を $2^{n+1} \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n+1}{2}$$

$d_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$d_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2},\quad d_{n+1} - d_n = \frac{n+1}{2}$$

より，数列 $\{d_n\}$ の階差数列の一般項は $\dfrac{n+1}{2}$ である．ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}(n-1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1) \end{aligned}$$

これは $n=1$ **のときも成り立つので，**$d_n = \dfrac{1}{4}n(n+1)$ **である．ゆえに，**

$$a_n = \frac{1}{4}n(n+1)2^n \iff \boldsymbol{a_n = n(n+1)2^{n-2}}\cdots\cdots(答)$$

(3)　(2) **より，**

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n \\ -) & 2S_n = & 2a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + 2a_{n-1} + 2a_n \\ \hline & -S_n = & a_1 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_{n-1} - 2a_n \end{array}$$

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ **より，**$-2a_n = b_n - a_{n+1}$ **であるから，**

$$S_n = -a_1 - (b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_{n-1} + b_n) + a_{n+1} \cdots\cdots ①$$

ここで，$T_n = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$ **とおくと，**$b_n = (n+1)2^n$ **であるから，**

$$\begin{array}{rrl} & T_n = & 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (n+1)2^n \\ -) & 2T_n = & 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots\cdots + n\cdot 2^n + (n+1)2^{n+1} \\ \hline & -T_n = & 2\cdot 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^n - (n+1)2^{n+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_n &= -2 - (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^n) + (n+1)2^{n+1} \\ &= -2 - \frac{2(2^n - 1)}{2-1} + (n+1)2^{n+1} \\ &= n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

ゆえに，① へ代入して，

$$\begin{aligned} S_n &= -1 - n\cdot 2^{n+1} + (n+1)(n+2)2^{n-1} \\ &= \{-4n + (n^2 + 3n + 2)\}2^{n-1} - 1 \\ &= \boldsymbol{(n^2 - n + 2)\cdot 2^{n-1} - 1}\cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

◇　♡

解説

漸化式の様々な知識が盛り込まれた問題なので，中途半端な知識では完答は難しいでしょう．一つ一つの計算は基本的なものですがそれが融合されることで解きにくいと感じる問題です．漸化式や和の計算の総復習にはちょうどよい演習問題です．

(1) **は，与えられた隣接** 3 **項間漸化式を置き換えにより隣接** 2 **項間漸化式にするという問題です．数列** $\{b_n\}$ **の漸化式を導きたいので，まず** b_{n+1} **を考えてみます．**$(n+1)b_{n+1} = 2(n+2)b_n$ **という形の漸化式を見たことがない人には難しいでしょうから，経験を積んで様々な漸化式にあたっておく必要があります．**(2) **では，**(1) **で求めた** b_n **を用いて** a_n **を求めます．ここでは階差数列に関する漸化式の知識が必要です．**(3) **は** (**等差数列**)×(**等比数列**) **の和の計算方法で求めますが，**a_n **の多項式部分が** 2 **次式であるため** 2 **回計算を実行しなければ和が求められません．**
(1) **の** b_n **を用いると解答がすっきりとまとめられるでしょう．**

n を 2 以上の自然数として，

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

n を 2 以上の自然数として，

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ の形になっていることに気付く必要があります．(2) は，関数の単調性を利用したり面積の大小関係を用いることで証明できます．(3) は，(2) で示した不等式を用いて，はさみうちの原理で求めます．

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_n^{n^3} \frac{(\log x)'}{\log x}\,dx \\
&= \Big[\log|\log x|\Big]_n^{n^3} \\
&= \log(\log n^3) - \log(\log n) \\
&= \log\frac{3\log n}{\log n} \\
&= \mathbf{log\,3}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(2) **【証明】**

$f(x) = x\log x$ とおくと，$f'(x) = \log x + 1$ であるから，$x \geqq 2$ で $f'(x) > 0$ である．したがって，$x \geqq 2$ において $f(x)$ は単調増加である．すなわち $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ とおくと，$x \geqq 2$ で $g(x)$ は単調減少であるから，$k \geqq 2$ において，$k < x < k+2$ となる x に対し，

$$g(k+1) < g(x) < g(k) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \frac{1}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

である．よって，

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x\log x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k\log k}\,dx$$

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x\log x}\,dx < \frac{1}{k\log k}$$

が成り立つので，示された． **(証明終)**

(3)　(2) で示した不等式において，$k=n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots\cdots,\ n^3-1$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\log x}\,dx<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}\ \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}&=\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3\log n^3}\\&=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\log x}\,dx=\int_n^{n^3}\frac{1}{x\log x}\,dx=\log 3\quad(\because\ (1))$$

よって，① より，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\log 3<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

$$\log 3<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}$$

$$\log 3<S_n<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}\right)=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{log\,3}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　　　　♡

解説

(1) は，$t=\log x$ とおいて置換積分法を用いても求められますが，$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$ (C は積分定数) を用いて計算できるようにしておく方が時間短縮や計算ミス軽減などの面から考えるとよいでしょう．(2), (3) は頻出のタイプなので確実に得点できるようにしておく必要があります．特に (2) の不等式の示し方は様々なタイプがあります．ここでは単調性を利用して示しましたが，面積の大小関係などを用いる方法もよく利用されます．(3) の極限計算ですが，和の計算部分を少々適当にしても答えはあうでしょうが，記述のテストなのできちんとした処理が求められています．とくに，和の一般項部分を変換する式変形

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}$$

は理解して，できるようにしておきたいところです．

m を自然数とする．$2^m!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を $N(m)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$N(5)$ を求めよ．

(2)　$N(m)$ を m の式で表せ．

(3)　$N(m)$ が素数ならば，m も素数であることを証明せよ．

m を自然数とする．$2^m!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を $N(m)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

（1） $N(5)$ を求めよ．

（2） $N(m)$ を m の式で表せ．

（3） $N(m)$ が素数ならば，m も素数であることを証明せよ．

【テーマ】：整数問題

方針

記号の意味を正確に把握する必要があります．$2^m!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数を求める問題であることに気付きましょう．

♣ ♠

解答

（1） $N(5)$ は，$2^5! = 32!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を表すので，$32!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数が $N(5)$ である．1 から 32 までの自然数において，

2^1 の個数は，　16 個

2^2 の個数は，　8 個

2^3 の個数は，　4 個

2^4 の個数は，　2 個

2^5 の個数は，　1 個

であるから，素因数 2 の個数は，

$$N(5) = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{31}\ \textbf{(個)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

（2） （1）と同様に考えると，$N(m)$ は $2^m!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数と一致する．

2^1 の個数は，　2^{m-1} 個

2^2 の個数は，　2^{m-2} 個

2^3 の個数は，　2^{m-3} 個

⋮　　　⋮

2^{m-1} の個数は，　2^1 個

2^m の個数は，　2^0 個

であるから，素因数 2 の個数は，

$$\begin{aligned} N(m) &= 2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \cdots\cdots + 2^1 + 2^0 \\ &= \frac{2^m - 1}{2 - 1} \\ &= \mathbf{2^m - 1}\cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

（3）【証明】

$m=1$ のときは，$N(1)=1$ となるので不適であるから，$m \geqq 2$ で考える．m が素数でないとき，2 以上の整数 p, q を用いて，$m=pq$ と表すことができる．(2) の結果から，

$$\begin{aligned} N(m) &= 2^m - 1 \\ &= 2^{pq} - 1 \\ &= (2^p)^q - 1 \\ &= (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \cdots\cdots + 2^p + 1) \end{aligned}$$

と因数分解することができる．$p \geqq 2$ であるから，$2^p - 1 \geqq 3$ であり，$2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \cdots\cdots + 2^p + 1$ は q 個の自然数の和であるから 2 以上である．したがって，

命題：「m が素数でないならば $N(m)$ は素数でない」

が成り立つので，その対偶である

命題：「$N(m)$ が素数ならば m は素数である」

が成り立つ．以上より，題意は示された．（証明終）

解説

類題の経験がないとやや難しいと感じる問題です．ただし，類題を解いたことがある人にとっては易しいと感じるでしょう．経験が得点差に現れる問題です．(1) は (2) を求めるためのヒントになっているので，(1) で記号の意味を把握し，何を求めればよいのかを理解する必要があります．(2) では，それを一般化する力が問われています．解答では，素因数 2 の個数を $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$ の倍数の個数を足していますが，これは次のように考えています．

2^m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	⋯
2^1		●		●		●		●		●		●		●		●	
2^2				●				●				●				●	
2^3								●								●	
2^4																●	
⋮																	

上の表の●は，横に並べた自然数を素因数分解したときの素因数 2 の個数と一致しています．つまり，2^m の素因数 2 の個数はこの●の個数と一致することになります．そこで，縦に並べた $2^1, 2^2, 2^3, \cdots$ の倍数で●の個数を計算して●の個数を求めようという考え方です．

(3) は，素数の性質を理解しておく必要があります．自然数は

1，　素数，　合成数

の 3 つに分類することができます．合成数とは，2 以上の整数 p, q を用いて pq と表すことができる自然数です．要するに 1 と素数以外の自然数はすべて合成数になります．素数の実態を把握することは困難ですからこの合成数を用いて証明を進めていきます．解答では与えられた命題の対偶をとって証明をしています．この証明方法を「**対偶証明法**」といいます．

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\,0)$ に重なるようにおく．点 A を y 軸に沿って点 $(0,\,1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる．このとき線分 AB が通る領域を D とする．$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\,y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする．

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ．

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ．

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,0)$ に重なるようにおく．点 A を y 軸に沿って点 $(0,1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる．このとき線分 AB が通る領域を D とする．$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 (x, y) が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする．

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ．

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

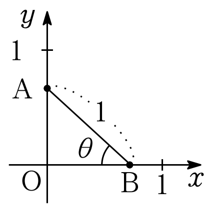
(1) は，直線 AB の方程式を求めるため，$\angle \mathrm{ABO} = \theta$ と置きます．(2) は，(1) が求まれば公式通りに計算できます．

♣ ♠

解答

(1)　$\angle \mathrm{ABO} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき，$\mathrm{A}(0, \sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos\theta, 0)$ より，直線 AB の方程式は，

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \iff y = -(\tan\theta)x + \sin\theta$$



である．よって，x を $0 < x < 1$ の範囲で固定したときの y の最大値が $f(x)$ である．

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\cos^2\theta}x + \cos\theta \\ &= \frac{\cos^3\theta - x}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ であり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos^3\theta$ は単調減少であるから，$y' = 0$ のとき，$\cos^3\theta = x$ となる θ がただ 1 つ存在する．この θ を α とすると，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

よって，$\theta = \alpha$ のとき最大値をとる．$\cos^3\alpha = x$ であるから，$\cos\alpha = x^{\frac{1}{3}}$ である．

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

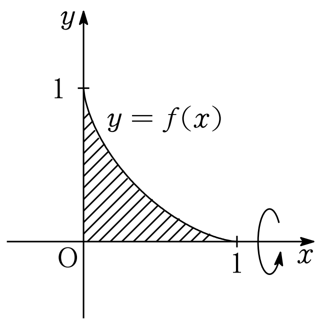
より，

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}x + \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}} = -\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}\,x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ここで，$f(0)=1$，$f(1)=0$ であるから，

$$\boldsymbol{f(x)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから，求める体積を V とすると，



$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\{f(x)\}^2\,dx \\ &= \int_0^1 \pi\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx \\ &= \int_0^1 \pi\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right) dx \\ &= \pi\left[\,x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^1 \\ &= \left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{105}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

有名な問題です．$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で表される図形を「**アステロイド**」といいます．本問で求めた関数 $f(x)$ はこのアステロイドの第 1 象限の部分になります．$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ は x 軸と y 軸に関して対称な図形なので，本問で得られた図形を対称移動すればアステロイドが描けます．一度は自分で関数の導出を経験しておきたい図形です．

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を $a_1=3,\ b_1=8,\ c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める.

(1) b_n を n の式で表せ.

(2) $a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ.

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を $a_1=3$, $b_1=8$, $c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める．

(1)　b_n を n の式で表せ．

(2)　$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ．

【テーマ】：連立漸化式

方針

数列 $\{c_n\}$ は等比数列なので，まずは c_n を求めます．そうすると b_n を求めることができます．(2) では，与えられた漸化式を用いて $a_{n+3}-a_n$ を計算してみます．また，a_n が 7 で割り切れる条件は，a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots$ を計算してみて規則性を調べてみましょう．

♣　♠

解答

(1)　数列 $\{c_n\}$ は初項 24，公比 8 の等比数列であるから，

$$c_n=24\cdot 8^{n-1}=3\cdot 8^n$$

である．したがって，$b_{n+1}=4b_n+3\cdot 8^n$ の両辺を $8^{n+1}\neq 0$ で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{8^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{8^n}+\frac{3}{8}$$

である．$d_n=\dfrac{b_n}{8^n}$ とおくと，$d_1=\dfrac{b_1}{8}=1$ であり，

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{3}{8} \iff d_{n+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\left(d_n-\frac{3}{4}\right)$$

であるから，数列 $\left\{d_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は初項 $d_1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．ゆえに，

$$d_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff d_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，

$$b_n=8^n\left\{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \iff \boldsymbol{b_n=3\cdot 2^{3n-2}+2^{2n-1}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　**【証明】**

与えられた漸化式から，

$$\begin{aligned} a_{n+3}-a_n &= 2a_{n+2}+b_{n+2}-a_n \\ &= 2(2a_{n+1}+b_{n+1})+(4b_{n+1}+c_{n+1})-a_n \\ &= 4a_{n+1}+6b_{n+1}+c_{n+1}-a_n \\ &= 4(2a_n+b_n)+6(4b_n+c_n)+8c_n-a_n \\ &= 7a_n+28b_n+14c_n \\ &= 7(a_n+4b_n+2c_n) \end{aligned}$$

ここで，a_1, b_1, c_1 は整数であるから，与えられた漸化式より，a_n, b_n, c_n は任意の自然数 n に対して整数であることがわかるので，$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることが示された． **（証明終）**

次に，数列 $\{a_n\}$ について，

$$a_1=3$$

$$a_2=2a_1+b_1=14=7\cdot 2$$

$$a_3=2\cdot 14+3\cdot 2^4+2^3=2\cdot 14+56=7\cdot 12$$

であるから，a_1 は 7 で割り切れず，a_2, a_3 は 7 で割り切れる．

$a_{n+3}-a_n=7k$（k は自然数）と表されるので，$a_{n+3}=a_n+7k$ であるから，l を自然数として，

$a_1, a_4, a_7, \cdots\cdots, a_{3l-2}$　7 で割り切れない

$a_2, a_5, a_8, \cdots\cdots, a_{3l-1}$　7 で割り切れる

$a_3, a_6, a_9, \cdots\cdots, a_{3l}$　7 で割り切れる

であることがわかる．以上より，a_n が 7 で割り切れるための n の条件は，l を自然数として，

$\boldsymbol{n=3l,\ 3l-1}$……（答）

である．

解説

（1）は，連立漸化式を解く問題ですが，実際には，一つずつ漸化式を解けばよいため，基本的な漸化式の解法が身に付いていれば基本問題です．

（2）は，与えられた漸化式を用いて $a_{n+3}-a_n$ を式変形すれば $7(a_n+4b_n+2c_n)$ という形を得ることができますが，これでいきなり 7 の倍数と言ってはいけません．$a_n+4b_n+2c_n$ が整数であることを述べて初めて 7 の倍数であることがわかるからです．また，これを示すことで数列 $\{a_n\}$ の各項を 7 で割った余りは 3 を周期に変化することに気付きましょう．後半の証明はこれを用います．まずは，a_1, a_2, a_3 を計算して，最初の状態を把握します．あとは，$a_{n+3}=a_n+7k$ という形から，7 で割った余りが周期的に変化することを述べれば n の条件が 3 で割った余りで分類できることがわかるでしょう．

以下の問いに答えよ．

（1） 実数 x, y が $4^x - 4\cdot 2^x + 9^y - 2\cdot 3^y \leqq -1$ を満たすとき，$2^x + 3^y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

（2） 実数 x, y が $4^x - 2\cdot 2^x + 2^y \leqq 0$ を満たすとき，$x + y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

以下の問いに答えよ.

(1) 実数 x, y が $4^x - 4\cdot 2^x + 9^y - 2\cdot 3^y \leqq -1$ を満たすとき, $2^x + 3^y$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) 実数 x, y が $4^x - 2\cdot 2^x + 2^y \leqq 0$ を満たすとき, $x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【テーマ】: 領域と最大・最小

方針

(1) は, 指数不等式で与えられているため, $X = 2^x$ などと置き換えます. $2^x + 3^y$ のとり得る値の範囲を求めるため, $2^x + 3^y = k$ と置き, k のとり得る値の範囲を求めます. (2) も同様に考えますが, $x+y$ のとり得る値の範囲を求めるので, k と置くのではなく $X = 2^x, Y = 2^y$ として, XY のとり得る値を考えます.

解答

(1) $2^x = X, 3^y = Y$ と, $X > 0, Y > 0$ ... 条件は

$$X^2 - 4X + Y^2 - 2Y \leqq -1 \iff (X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4$$

$X + Y = k$ ... $(X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4, X > 0, Y > 0$ ... $X + Y = k$ ... k ...

$(X-2)^2 + (Y-1)^2 \leqq 4, X > 0, Y > 0$ ...

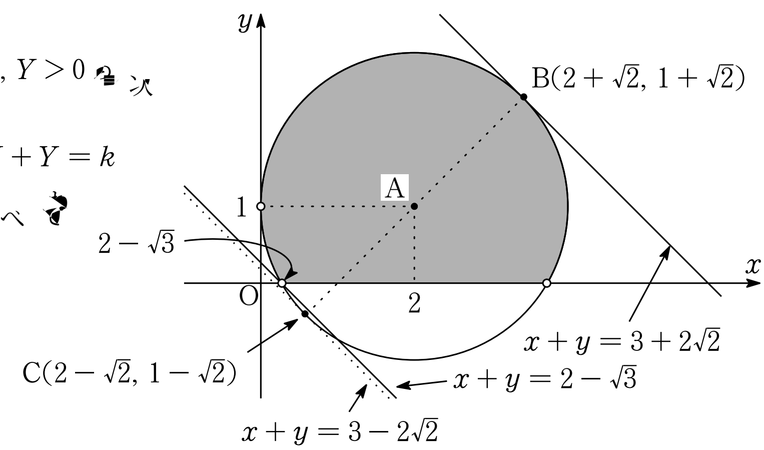
$(X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4$ ... $X + Y = k$

... 2 ...

$$\frac{|2+1-k|}{\sqrt{1+1}} \leqq 2$$

$$|k-3| \leqq 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad 3 - 2\sqrt{2} \leqq k \leqq 3 + 2\sqrt{2}$$



$(X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4$ ... x ... x ... $Y = 0$ ...

$$(X-2)^2 + 1 = 4 \iff X = 2 \pm \sqrt{3}$$

... $X + Y = k$ が $(2-\sqrt{3}, 0)$ ... k ... $k = 2-\sqrt{3}$ ... $k = 3 - 2\sqrt{2}$ ... k ... $2-\sqrt{3} < k \leqq 3+2\sqrt{2}$ ...

$$\mathbf{2 - \sqrt{3} < 2^x + 3^y \leqq 3 + 2\sqrt{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $X = 2^x, Y = 2^y$ と, $X > 0, Y > 0$ ... 条件は

$$X^2 - 2X + Y \leqq 0 \iff Y \leqq -X^2 + 2X$$

$$XY = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$$ ... XY ...

$XY \leqq X(-X^2+2X) = -X^3+2X^2$ [illegible] $f(X) = -X^3+2X^2$ [illegible]

$$f'(X) = -3X^2+4X = -X(3X-4)$$

[illegible] $f'(X)=0$ [illegible] $X = 0,\ \dfrac{4}{3}$ [illegible]

X	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(X)$		$+$	0	$-$	
$f(X)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	(0)

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}+2\cdot\frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

[illegible] $f(X)$ [illegible]

$$0 < f(X) \leqq \frac{32}{27} \iff 0 < 2^{x+y} \leqq \frac{32}{27}$$

$2^{x+y} \leqq \dfrac{32}{27}$ [illegible] 2 [illegible]

$$x+y \leqq \log_2 \frac{2^5}{3^3} = 5 - 3\log_2 3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+y \leqq 5-3\log_2 3}\cdots\cdots(答)$$

◇ ♡

解説

$X=2^x$ [illegible]

(1) [illegible] $Y>0$ [illegible] $\frac{4}{3}$ [illegible] $(2-\sqrt{3},\ 0)$ [illegible] k [illegible] k [illegible]

(2) $x+y$ [illegible] $x+y=k$ [illegible] $XY=2^{x+y}$ [illegible] $x+y$ [illegible] XY [illegible] $XY \leqq f(X)$ [illegible] $f(X)$ [illegible]

[illegible] $\theta\ (0<\theta<\pi)$ [illegible] $\{a_n\}$ [illegible] $a_n=\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2 n\theta\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ [illegible]

(1) [illegible] $\alpha,\ \beta$ [illegible] $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ [illegible]

(2) $(1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta+\cdots\cdots+2\cos 2n\theta)\sin\theta=\sin(2n+1)\theta$ [illegible]

(3) $a_n-\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots\cdots+\cos 2n\theta)$ [illegible] θ [illegible]

(4) $a_n-\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$ [illegible] θ [illegible]

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ [illegible]

$\theta\ (0<\theta<\pi)$ 　 $\{a_n\}$ 　 $a_n=\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2 n\theta\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1) 　 $\alpha,\ \beta$ 　 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(2) $(1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta+\cdots\cdots+2\cos 2n\theta)\sin\theta=\sin(2n+1)\theta$

(3) $a_n-\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots\cdots+\cos 2n\theta)$ 　 θ

(4) $a_n-\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$ 　 θ

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

【テーマ】：無限級数

方針

(1) 　(2) 　(1) 　(3) 　2 　(2) 　(4) 　(2), (3) 　(5) 　(4) 　$\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}$

解答

(1) 【証明】

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots\quad ①$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots\quad ②$$

① + ②

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\therefore\quad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

（証明終）

(2) 【証明】

$$\begin{aligned}(\quad)&=\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}2\cos 2k\theta\sin\theta\\&=\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k+1)\theta+\sin(1-2k)\theta\}\quad(\because\ (1))\\&=\sin\theta-\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k-1)\theta-\sin(2k+1)\theta\}\\&=\sin\theta-\{(\sin\theta-\sin 3\theta)+(\sin 3\theta-\sin 5\theta)+(\sin 5\theta-\sin 7\theta)+\cdots\\&\qquad\cdots+(\sin(2n-3)\theta-\sin(2n-1)\theta)+(\sin(2n-1)\theta-\sin(2n+1)\theta)\}\\&=\sin(2n+1)\theta\end{aligned}$$

（証明終）

(3)　2

$$a_n = \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{1+\cos 4\theta}{2} + \frac{1+\cos 6\theta}{2} + \cdots\cdots + \frac{1+\cos 2n\theta}{2}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta)$$

$$\therefore\ \ a_n - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta) = \boldsymbol{\frac{n}{2}}\cdots\cdots(答)$$

(4)　(2)

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta)$$

(3)

$$a_n - \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} = a_n - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta) - \frac{1}{4}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n}{2} - \frac{1}{4}}\cdots\cdots(答)$$

(5)　(4)

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

$0 \leqq \left|\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}\right| \leqq \left|\frac{1}{4n\sin\theta}\right|$　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n\sin\theta} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}\right| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(答)$$

◇　♡

解説

(1)，(4)　(5)

(1)　同

(2)　(1)　(1)

(3)　2

(4)　(2), (3)

(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}$　$n\to\infty$　$\sin(2n+1)\theta$　∞　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

n ... k ... $P(x)$ ... か n ... じ ... $(1+x)^k P(x)$ ... n ... 行 ... かじ

い ... と ... $P(x)$ ... n ... 行 ... い ... て さ ... 行

行 る 心 ... とじ

n [illegible] k [illegible] $P(x)$ [illegible] n [illegible] $(1+x)^k P(x)$ [illegible] n [illegible] $P(x)$ [illegible] n [illegible]

【テーマ】：整式

方針

[illegible]

解答

【証明】

m [illegible] $m \geqq n$ [illegible] $P(x)$ の x^j $(0 \leqq j \leqq m)$ の係数を a_j とすると，

$$(1+x)^k P(x) = (1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k) \times$$
$$\times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots + a_m x^m)$$

である．また，$Q(x) = (1+x)^k P(x)$ に対して，x^j の係数を b_j とすると，題意より，b_j は整数である．

$b_0 = a_0$ であるから，a_0 は整数である．また，$1 \leqq j \leqq n$ に対して，x^j の係数 b_j は，

$$b_j = a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0$$

である．ただし，$k < i$ のときは ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする．これより，

$$a_j = b_j - {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} - {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} - \cdots\cdots - {}_k\mathrm{C}_j a_0 \ \cdots\cdots ①$$

となる．なお，${}_k\mathrm{C}_j$ は組合せの総数であるから整数である．

(i) $j = 1$ のとき，$a_1 = b_1 - {}_k\mathrm{C}_1 a_0$ となるので，b_1, a_0 が整数であることから，a_1 は整数である．

(ii) $j = l$ $(0 \leqq l \leqq n-1)$ のとき，$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_l$ がすべて整数であると仮定すると，① より，

$$a_{l+1} = b_{l+1} - {}_k\mathrm{C}_1 a_l - {}_k\mathrm{C}_2 a_{l-1} - \cdots\cdots - {}_k\mathrm{C}_{l+1} a_0$$

であるから，b_{l+1} が整数であることと仮定より，a_{l+1} は整数である．

(i), (ii) より，数学的帰納法によって $P(x)$ の係数 a_j $(0 \leqq j \leqq n)$ は整数であることが示された． **（証明終）**

解説

与えられた整式 $P(x)$ の次数が n 以上とあるので，具体的にそれを表すことで $(1+x)^k P(x)$ を計算することができます．わかりにくい場合は，次数を小さくして実験をしてみましょう．例えば，$k = 2$, $P(x)$ を 3 次式として，

$$(1+x)^2 P(x) = (1 + 2x + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$$
$$= \underbrace{a_3}_{b_5} x^5 + \underbrace{(2a_3 + a_2)}_{b_4} x^4 + \underbrace{(a_3 + 2a_2 + a_1)}_{b_3} x^3 + \underbrace{(a_2 + 2a_1 + a_0)}_{b_2} x^2 + \underbrace{(a_1 + 2a_0)}_{b_1} x + \underbrace{a_0}_{b_0}$$

と展開します．展開するときは，$(1 + 2x + x^2)$ と $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$ からそれぞれ 1 つずつ項を取り出してかけるので，x^3 の項であれば，$1 \times a_3 x^3$, $2x \times a_2 x^2$, $x^2 \times a_1 x$ の 3 つがあるので，それをすべて加えたものが x^3 の項になります．この規則に従って展開をすれば上記のようになります．

この展開の仕組みを理解することこそが，本問解法の第一歩となります．$k=2$ として実験をしましたが，$(1+x)^k$ のまま展開をすると，二項定理が必要になります．この係数は，${}_k\mathrm{C}_j$ で表されるため先ほどの展開の仕組みから，解答にある b_j が

$$b_j = a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0$$

となります．$a_0 = b_0$ であることから，a_0 は整数であることがわかるため，以下数学的帰納法で証明すればよいのです．このように，抽象的な問題や一般化された問題に対しては，具体的な値で実験をして『問題の本質』や『計算の仕組み』などを理解することが問題解決の大きな鍵となることを演習を通じて学んでください．

xy 平面上の原点を中心として半径 1 の円 C を考える．$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を P とする．P で C に接し，さらに y 軸と接する円でその中心が円 C の内部にあるものを S とし，その中心 Q の座標を (u, v) とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） u と v をそれぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて表せ．

（2） $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ としたとき，点 Q の軌跡の式を求めよ．さらに，その軌跡を図示せよ．

（3） 円 S の面積を $D(\theta)$ とするとき，次の値を求めよ．

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$$

xy 平面上の原点を中心として半径 1 の円 C を考える．$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を P とする．P で C に接し，さらに y 軸と接する円でその中心が円 C の内部にあるものを S とし，その中心 Q の座標を (u, v) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　u と v をそれぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて表せ．

(2)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ としたとき，点 Q の軌跡の式を求めよ．さらに，その軌跡を図示せよ．

(3)　円 S の面積を $D(\theta)$ とするとき，次の値を求めよ．

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$$

【テーマ】：関数の極限

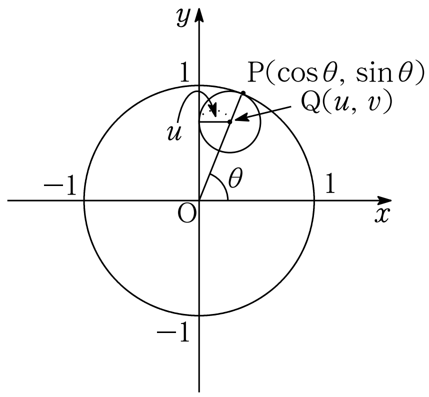
方針

(1) は，円 S の半径が u であることに着目して，三角比の定義を用います．(2) は，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であることを利用します．x, y のとり得る値の範囲にも注意が必要です．(3) は，三角関数に関する極限を考えるので，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が使えるかもしれないという方針を立てて式変形を試みます．

♣　♠

解答

(1)　円 S は，y 軸と接しているので，その中心 Q の x 座標がこの円の半径と一致する．また，$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ であるから，線分 OP と x 軸の正の方向とのなす角が θ である．



$\mathrm{OQ} = 1 - u$ であることから，

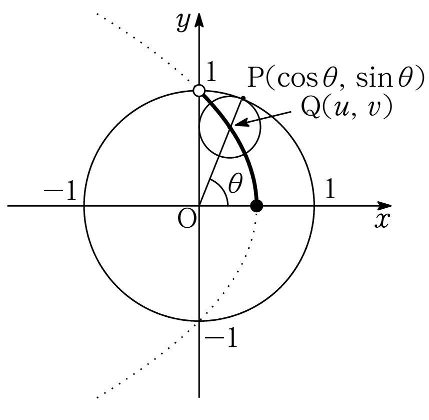
$$\cos\theta = \frac{u}{1-u},\quad \sin\theta = \frac{v}{1-u} \cdots\cdots ①$$

を得る．これより，

$$(1-u)\cos\theta = u \iff (1+\cos\theta)u = \cos\theta$$
$$\iff u = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$(1-u)\sin\theta = v \iff \left(1 - \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\sin\theta = v$$
$$\iff v = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{u = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\quad v = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　① より，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ へ代入すると，



$$\left(\frac{v}{1-u}\right)^2 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^2 = 1$$
$$v^2 + u^2 = (1-u)^2 \iff v^2 + u^2 = 1 - 2u + u^2$$
$$\therefore\ u = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}$$

ゆえに，求める点 Q の軌跡の方程式は，

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\ \ (0 \leqq y < 1)} \cdots\cdots(\text{答})$$

これを図示すると，右図の太実線部分になる．

(3)　円 S の半径は u であるから，$D(\theta)=\pi u^2$ である．したがって，

$$D(\theta)=\pi\frac{\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

である．$\dfrac{\pi}{2}-\theta=x$ とおくと，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x\to 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{D(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}&=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\pi\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\cdot x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\pi}{(1+\sin x)^2}\\&=\boldsymbol{\pi}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇　♡

解説

(1) は，様々な求め方があるので，別解を考えてみてもよいでしょう．この手の計算は苦手とする人が結構いますが，三角比の定義・ベクトルなどを用いれば解決できることが多いです．

(2) は，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めるため，u と v の関係式を求めることを考えます．(1) で $\cos\theta,\ \sin\theta$ を $u,\ v$ で表しているので，三角比の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入します．この相互関係の式は，常に成り立つ関係式なので問題文に書かれることはほとんどありません．自ら関係式を持ち出してこれるように演習を積んでおく必要があります．

(3) は，三角関数の極限に関する問題です．問題文では，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ となっているので，$\dfrac{\pi}{2}-\theta=x$ という置き換えを考えます．これは，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて計算する可能性が高いためです．極限計算の演習は，地味ですがかなり重要ですので，しっかりと演習を積んでおきましょう．

O を原点とする座標空間に 4 点

$$A(-2,\ 1,\ 3),\quad B(s,\ 3,\ -1),\quad C(1,\ 3,\ 4),\quad D(t,\ 2t,\ 2t)$$

がある．ただし，s, t は実数で $t \fallingdotseq 0$ である．A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に平行な直線と，B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に平行な直線が点 P で交わるとする．次の問いに答えよ．

(1) s の値および P の座標を求めよ．

以下では，$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ を仮定する．

(2) t の値を求めよ．

(3) D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき，H の座標を求めよ．

O を原点とする座標空間に 4 点

$$\mathrm{A}(-2,\ 1,\ 3),\quad \mathrm{B}(s,\ 3,\ -1),\quad \mathrm{C}(1,\ 3,\ 4),\quad \mathrm{D}(t,\ 2t,\ 2t)$$

がある．ただし，$s,\ t$ は実数で $t \neq 0$ である．A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に平行な直線と，B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に平行な直線が点 P で交わるとする．次の問いに答えよ．

(1)　s の値および P の座標を求めよ．

以下では，△PAB ∽ △OCD を仮定する．

(2)　t の値を求めよ．

(3)　D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき，H の座標を求めよ．

【テーマ】：空間ベクトルと直線の方程式

方針

(1) は，2 つのベクトル方程式を考えてその交点を求めます．(2) は，相似である条件を利用して t の値を定め，(3) は，4 点が同一平面上にあることと内積を利用して求めます．

♣　♠

解答

(1)　点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に平行な直線を m とし，直線 m 上の任意の点を X とする．また，点 B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に平行な直線を n とし，直線 n 上の任意の点を Y とする．このとき，直線 $m,\ n$ の方程式は，それぞれ

直線 m ： $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(1,\ 3,\ 4)$ ……　Ⓐ

直線 n ： $\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + l(1,\ 2,\ 2)$ ……　Ⓑ

となるので，それぞれを成分で表すと次のようになる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = (-2,\ 1,\ 3) + k(1,\ 3,\ 4) = (k-2,\ 3k+1,\ 4k+3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = (s,\ 3,\ -1) + l(1,\ 2,\ 2) = (l+s,\ 2l+3,\ 2l-1)$$

直線 $m,\ n$ が交わるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ である場合を考えればよいので，

$$\begin{cases} k-2 = l+s \\ 3k+1 = 2l+3 \\ 4k+3 = 2l-1 \end{cases}$$

となり，これを解いて，$k=-6,\ l=-10,\ s=2$ を得る．このとき，X = Y = P であるから，求める点 P の座標と s の値は，

P(−8, −17, −21)，　$s = 2$……(答)

(2)　(1) より，X = Y = P として，Ⓐ, Ⓑ の式を変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -6(1,\ 3,\ 4) = -6\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = -10(1,\ 2,\ 2) = \frac{-10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \frac{10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となる．$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ であることから，相似比は 6：1 となるので，

$$6 = \frac{10}{t} \iff \boldsymbol{t = \frac{5}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　点 H は平面 PAB 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \,/\!/\, (1,\,3,\,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \,/\!/\, (1,\,2,\,2)$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = x(1,\,3,\,4) + y(1,\,2,\,2) \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}} - \overrightarrow{\mathrm{DP}} = x(1,\,3,\,4) + y(1,\,2,\,2)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DH}} &= \overrightarrow{\mathrm{DP}} + x(1,\,3,\,4) + y(1,\,2,\,2)\\ &= \left(-\frac{29}{3},\,-\frac{61}{3},\,-\frac{73}{3}\right) + x(1,\,3,\,4) + y(1,\,2,\,2)\\ &= \left(x + y - \frac{29}{3},\,3x + 2y - \frac{61}{3},\,4x + 2y - \frac{73}{3}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot(1,\,3,\,4) = 0 \iff 26x + 15y - 168 = 0 \quad\cdots\cdots\ ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot(1,\,2,\,2) = 0 \iff 15x + 9y - 99 = 0 \quad\cdots\cdots\ ②$$

①, ② より，これを解いて，$x = 3$, $y = 6$ を得る．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}}\\ &= (-8,\,-17,\,-21) + 3(1,\,3,\,4) + 6(1,\,2,\,2)\\ &= (1,\,4,\,3)\end{aligned}$$

ゆえに，求める点 H の座標は，**H(1, 4, 3)**……(答)

◇　♡

解説

空間内で 2 直線が交わるときを考えるので，ベクトル方程式を利用します．解答にあるように $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を成分で表して，交点になるときは，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となることを利用します．(2) 以降は，$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ を仮定するとあるので，これを利用します．相似比を利用して t の値を求めればよいことになります．Ⓐ, Ⓑ から $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ という関係を導き出せれば相似比がわかります．(3) は，典型的な問題です．4 点 H, P, A, B が同一平面上にあるときは，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + u\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ という関係が成り立つので，これと $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を利用して点 H の座標を求めます．

（1） 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

（2） 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right| dx$ の値を $S(a)$ とおく．a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

（1） 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

（2） 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left| \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} \right| dx$ の値を $S(a)$ とおく．a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分の最小値

方針

(1) は，分子分母に e^{-x} をかけることで $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ の公式が使えるようになります．
(2) は x の値が a より大きいか小さいかによって，絶対値内の符号が変化するので，そこで場合分けを行いましょう．

♣ ♠

解答

（1） 分子分母に e^{-x} をかけて，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \\ &= \int \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}\,dx \\ &= -\log(e^{-x}+1) + C \quad (\because\ e^{-x}+1>0) \\ &= -\log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + C \\ &= \boldsymbol{\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C} \quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})\cdots\cdots(\text{答}) \\ &= \boldsymbol{x - \log(1+e^x) + C} \quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数）でも可}\end{aligned}$$

（2） 絶対値内の数式の符号で場合分けを行う．

（i） $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$e^x \leqq e^a$ であるから，$\dfrac{1}{1+e^x} \geqq \dfrac{1}{1+e^a}$

（ii） $a \leqq x \leqq 2$ のとき，$e^x \geqq e^a$ であるから，$\dfrac{1}{1+e^x} \leqq \dfrac{1}{1+e^a}$

ゆえに，与えられた定積分の値は，

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a}\right) dx + \int_a^2 \left(-\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^a}\right) dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a}\right) dx + \int_2^a \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a}\right) dx \\ &= \left[\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - \frac{1}{1+e^a}x\right]_0^a + \left[\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - \frac{1}{1+e^a}x\right]_2^a \\ &= \log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) - \frac{a}{1+e^a} - \log\left(\frac{e^0}{1+e^0}\right) + \log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) - \frac{a}{1+e^a} - \log\left(\frac{e^2}{1+e^2}\right) + \frac{2}{1+e^a} \\ &= 2\log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) - \frac{2(a-1)}{1+e^a} - \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{e^2}{1+e^2}\right) \\ &= 2\log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) - \frac{2(a-1)}{1+e^a} + \log\frac{2(1+e^2)}{e^2}\end{aligned}$$

となるので，a で微分すると，

$$\begin{aligned}S'(a) &= 2\cdot\frac{1+e^a}{e^a}\cdot\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)' - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(1+e^a)}{e^a}\cdot\frac{e^a(1+e^a)-e^a\cdot e^a}{(1+e^a)^2} - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(1+e^a)}{(1+e^a)^2} - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\end{aligned}$$

となる．よって，$S'(a)=0$ のとき，$a=1$ であるから，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	最小	↗	

$$S(1) = 2\log\left(\frac{e}{1+e}\right) + \log\frac{2(1+e^2)}{e^2} = \log\frac{e^2}{(1+e)^2}\cdot\frac{2(1+e^2)}{e^2} = \log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$$

であるから，$S(a)$ は

$a=1$ のとき，最小値 $\log\dfrac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$……(答)

をとる．

解説

(1) は，$e^x=t$ と置換して積分をしても求められます．この場合は，与えられた不定積分は，

$$\int\frac{1}{1+e^x}\,dx = \int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

となるため，$\displaystyle\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$ という式変形をしなければいけません．この形にすれば，

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt &= \log|t| - \log|1+t| + C\\ &= \log e^x - \log(1+e^x) + C \quad (\because\ \ e^x>0,\ 1+e^x>0)\\ &= x - \log(1+e^x) + C\end{aligned}$$

となります．なお，絶対値は絶対値内の式が確実に正であることがわかった時点ではずします．

(2) は，絶対値内の数式の符号によって場合分けが必要になります．すなわち $\dfrac{1}{1+e^x}$ と $\dfrac{1}{1+e^a}$ の大小を比較するので，$0\leqq x\leqq a$ と $a\leqq x\leqq 2$ に分けて考える必要があります．$S(a)$ が求められれば，微分をして最小値を求めるだけなので，計算間違いをしないようにしましょう．

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = [\sqrt{n}] \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えなさい．

（1） $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めなさい．

（2） n を自然数とする．

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$

とするとき，次の等式を証明しなさい．

$$S_n = \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{1}{3}{a_n}^3$$

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = [\sqrt{n}] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えなさい．

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めなさい．

(2) n を自然数とする．

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$

とするとき，次の等式を証明しなさい．

$$S_n = \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{1}{3}{a_n}^3$$

【テーマ】：格子点問題

方針

(1) は，ガウス記号 $[\,x\,]$ の意味を理解できれば計算するだけです．(2) は，S_n が何を表しているかを考えます．格子点の個数として考えると計算方法が見えてくるでしょう．

♣ ♠

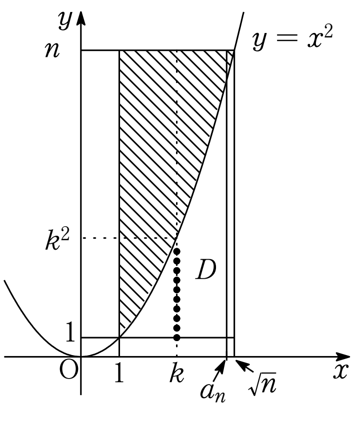
解答

(1) $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ であるから，

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) **【証明】**

$y = x^2\ (x \geqq 0)$ のグラフを考える．$y = k$ のとき，$x = \sqrt{k}$ であるから，S_n は，下図斜線部分の格子点の個数を表している．$a_n = [\sqrt{n}]$ であることから，領域 $1 \leqq x \leqq a_n$, $1 \leqq y \leqq n$ 内にある格子点の個数は，na_n 個であることがわかるので，領域 $1 \leqq y < x^2$, $1 \leqq x \leqq a_n$ 内にある格子点の個数を求める．



この領域を D とする．領域 D 内にあり，$x = k\ (1 \leqq k \leqq a_n)$ 上の格子点の個数を $L(k)$ とすると，

$$L(k) = k^2 - 1$$

である．よって，領域 D 内の格子点の個数 N は，

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=2}^{a_n}(k^2-1) = \sum_{k=1}^{a_n}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{6}a_n(a_n+1)(2a_n+1) - a_n \\ &= \frac{1}{3}{a_n}^3 + \frac{1}{2}{a_n}^2 + \frac{1}{6}a_n - a_n \\ &= \frac{1}{3}{a_n}^3 + \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{5}{6}a_n \end{aligned}$$

である．ゆえに，求める格子点の個数は，

$$
\begin{aligned}
S_n &= na_n - N \\
&= na_n - \left(\frac{1}{3}a_n{}^3 + \frac{1}{2}a_n{}^2 - \frac{5}{6}a_n\right) \\
&= \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}a_n{}^2 - \frac{1}{3}a_n{}^3
\end{aligned}
$$

となるので，示された． （証明終）

◇ ♡

解説

（2）では，S_n の意味を考えると方針が立ちやすくなります．本問は，領域 D 内の格子点の個数を求めれば長方形の格子点の個数からそれを除くことで斜線部分の格子点の個数が求められます．注意したいのは，$y = x^2$ 上の点は除くということです．したがって，

$$N = \sum_{k=2}^{a_n}(k^2 - 1)$$

となりますが，$k = 1$ のときは $k^2 - 1 = 0$ なので，

$$\sum_{k=2}^{a_n}(k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{a_n}(k^2 - 1)$$

となります．

$a > 1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*) \quad \frac{e^t - 1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

（1） $a = 2$ のとき，すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

（2） すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

$a > 1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*) \quad \frac{e^t - 1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a = 2$ のとき，すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

分母を払って考えます．(2) では，(1) の結果に着目すると方針が立て易くなります．

♣　♠

解答

(1)　$(*)$ の式は，

$$\frac{e^t - 1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}} \quad \Longleftrightarrow \quad e^t - 1 \geqq te^{\frac{t}{a}}$$

と変形できる．$f(t) = e^t - 1 - te^{\frac{t}{a}}$ とおく．$a = 2$ のとき，$t > 0$ において $f(t) \geqq 0$ であることを示せばよい．

【証明】

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^t - \left(e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}\right) \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}t - 1\right) \end{aligned}$$

である．一方，$g(t) = e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}t - 1$ とおくと，

$$g'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} > 0 \quad (\because t > 0)$$

であるから，$g(t)$ は単調増加である．$g(0) = 0$ であるから，$t > 0$ において $g(t) > 0$ であることがわかる．

よって，$f'(t) > 0$ となるので，$f(t)$ は単調増加である．$f(0) = 0$ であるから，$t > 0$ において $f(t) > 0$ であることがわかる．ゆえに，示された．　**(証明終)**

(2)　(i)　$a \geqq 2$ のとき，$e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ であることから，(1) の結果より $t > 0$ において $(*)$ は成り立つ．

(ii)　$1 < a < 2$ のときを考える．(1) と同様に $f(t)$ を定める．

$$f'(t) = e^t - \left(e^{\frac{t}{a}} + \frac{1}{a}te^{\frac{t}{a}}\right) = e^{\frac{t}{a}}\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{t}{a} - 1\right\}$$

である．一方，$h(t) = e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{t}{a} - 1$ とおくと，

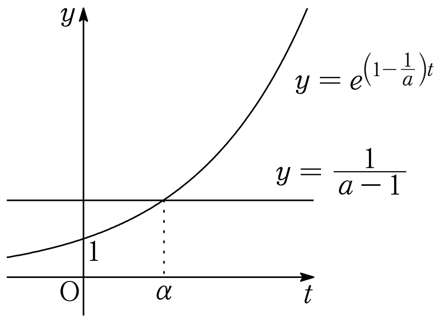
$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{1}{a} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}\right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{1}{a-1}\right\} \end{aligned}$$

$1 < a < 2$ であるから，$1 - \dfrac{1}{a} > 0$, $\dfrac{1}{a-1} > 1$ である．したがって，方程式

$$e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} = \frac{1}{a-1}$$

は，ただ 1 つの正の解をもつ．この正の解を α とする．

よって，$0 < t < \alpha$ で $h'(t) < 0$ となるので，この区間で $h(t)$ は単調減少する．$h(0) = 0$ であることから，$h(t) < 0$ となるため，この区間で $f'(t) < 0$ となる．$f(0) = 0$ であるから，$f(t) < 0$ となるので，題意を満たさず不適である．



ゆえに，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{a \geqq 2}$……(答)

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた分数式のままで $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t} - e^{\frac{t}{a}}$ とおくと，微分の計算が大変であり，その後の計算も苦労します．そこで，このような場合は，示したい不等式を同値変形しておきます．本問は $t > 0$ という条件のもとで考えるため分母を払うことができます．もしも，t がすべての実数という条件がある場合は，$t > 0$, $t < 0$ で場合分けをして分母を払いましょう．

(2) は，(1) がヒントとなります．方針は同じようにできますが，a が残っているため処理が面倒です．$a \geqq 2$ のとき，$e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つことに気付ければ $1 < a < 2$ を考えればよいことに気付くでしょう．しかし，この場合 $f(t)$ はすべての $t > 0$ に対して，単調増加や単調減少になるわけではありません．なぜなら $h'(t) = 0$ を満たす正の実数 t が存在するためです．グラフを見れば，$0 < t < \alpha$ で $h'(t) < 0$ となることがわかるため，この区間では $h(t)$ が単調減少になっていることがわかります．これを用いて，$1 < a < 2$ の場合は，題意を満たさないことを示します．

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする．

(1)　p_n+q_n を求めよ．

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

(3)　$r_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする．

(1) p_n+q_n を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

(3) $r_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1) は，T_n が 5 で割り切れない確率を求める問題です．(2) は，数列 $\{p_n\}$ の漸化式を立式します．(3) は誘導通りに解きます．

♣ ♠

解答

(1) p_n+q_n は T_n が 5 で割り切れない確率を表している．よって，X_1, X_2, …… X_n がすべて 5 以外であればよいので，求める確率は，

$$p_n+q_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) T_n を 5 で割った余りが 1 のとき，T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となるためには，X_{n+1} が 1 または 6 であればよい．また，T_n を 5 で割った余りが 2, 3, 4 の場合は，X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 であればよい．さらに，T_n が 5 の倍数のときは，T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となることはない．ゆえに，

$$p_{n+1}=\frac{2}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$$

が成り立つ．(1) の結果を用いると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-p_n\right\}\iff \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) (2) で求めた漸化式の両辺に $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ をかけると，

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}p_{n+1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\iff\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}p_{n+1}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n+\frac{1}{5}$$

と変形できるので，$r_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，

$$r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n+\frac{1}{5}\iff r_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(r_n-\frac{1}{4}\right)$$

である．$p_1=\frac{1}{3}$ より，$r_1=\frac{6}{5}p_1=\frac{2}{5}$ であるから，数列 $\left\{r_n-\frac{1}{4}\right\}$ は初項 $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$，公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列である．

$$\therefore\ r_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\iff r_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{4}$$

ゆえに，

$$p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，番号 n の状況と，番号 $n+1$ の状況を考えます．(1) は，漸化式を作らなくても題意をきちんと理解できれば容易に求められます．(2) は T_n を 5 で割ったときの余りが，0 か 1 か 2, 3, 4 の 3 つの場合を考えます．余りが 2, 3, 4 のときは，どの場合も確率 $\dfrac{1}{6}$ で T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となることに注意が必要です．すべて同じ確率になるため，まとめて $\dfrac{1}{6}q_n$ とできます．もしも，異なる確率である場合は，分けて考える必要があるため面倒になります．(3) は，誘導がありますが，(2) の漸化式の解き方を知っている人にとっては不要な誘導でしょう．

a を定数とする．2 次関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=6(a+1)x^2-12x\int_0^1 f(t)\,dt+5a-2$ を満たすとする．このとき，2 次関数 $f(x)$ と 3 次関数 $g(x)=-4x^3+f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\int_0^1 f(t)\,dt$ を a を用いて表せ．

(2) 3 次関数 $g(x)$ の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

(3) 3 次方程式 $g(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

a を定数とする．2 次関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=6(a+1)x^2-12x\int_0^1 f(t)\,dt+5a-2$ を満たすとする．このとき，2 次関数 $f(x)$ と 3 次関数 $g(x)=-4x^3+f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　定積分 $\int_0^1 f(t)\,dt$ を a を用いて表せ．

(2)　3 次関数 $g(x)$ の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

(3)　3 次方程式 $g(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，積分方程式なので，$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおきます．(2) は，$g(x)$ を微分して $g'(x)=0$ となる x の値を求め，増減表をかきますが，a の値による場合分けが必要となります．(3) は，$g(1)g(a)<0$ となる場合を考えましょう．

♣　♠

解答

(1)　$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，

$$f(x)=6(a+1)x^2-12Ax+5a-2$$

であるから，

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1\{6(a+1)t^2-12At+5a-2\}\,dt\\&=\Big[\,2(a+1)t^3-6At^2+(5a-2)t\,\Big]_0^1\\&=2(a+1)-6A+5a-2\\7A&=7a\end{aligned}$$

よって，$A=a$ となるので，$\int_0^1 f(t)\,dt=\boldsymbol{a}$……(**答**)

(2)　(1) より，

$$g(x)=-4x^3+6(a+1)x^2-12ax+5a-2$$

であるから，

$$\begin{aligned}g'(x)&=-12x^2+12(a+1)x-12a\\&=-12\{x^2-(a+1)x+a\}\\&=-12(x-1)(x-a)\end{aligned}$$

(i)　$a=1$ のとき，$g'(x)=-12(x-1)^2\leqq 0$ となり，$g(x)$ は単調減少である．ゆえに，極値はない．

(ii)　$a<1$ のとき，$g'(x)=0$ となるとき，$x=1, a$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$
\begin{aligned}
g(a) &= -4a^3 + 6(a+1)a^2 - 12a^2 + 5a - 2 \\
&= 2a^3 - 6a^2 + 5a - 2 \\
g(1) &= -4 + 6(a+1) - 12a + 5a - 2 \\
&= -a
\end{aligned}
$$

(iii)　$a > 1$ のとき，$g'(x) = 0$ となるとき，$x = 1,\ a$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

以上より，

$$
\begin{cases}
\text{(i)}\quad \boldsymbol{a = 1}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{g(x)}\ \textbf{は単調減少} \\
\text{(ii)}\quad \boldsymbol{a < 1}\ \textbf{のとき，}\ \begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{(x = 1)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{2a^3 - 6a^2 + 5a - 2} & \boldsymbol{(x = a)} \end{cases} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)} \\
\text{(iii)}\quad \boldsymbol{a > 1}\ \textbf{のとき，}\ \begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{2a^3 - 6a^2 + 5a - 2} & \boldsymbol{(x = a)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{(x = 1)} \end{cases}
\end{cases}
$$

(3)　$g(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は，

$a \neq 1$ かつ $g(1)g(a) < 0$

である．(2) より，

$(2a^3 - 6a^2 + 5a - 2)(-a) < 0$

$a(a-2)(2a^2 - 2a + 1) > 0$　$(\because\ \ 2a^3 - 6a^2 + 5a - 2 = (a-2)(2a^2 - 2a + 1))$

ここで，$2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ であるから，

$a(a-2) > 0$

$\therefore$　$\boldsymbol{a < 0,\ 2 < a}$**……(答)**

◇　♡

解説

(1) は，教科書レベルの積分方程式の問題です．$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ が定数であることに着目して，A とおきます．(2) は，$g'(x) = -12(x-1)(x-a)$ となりますが，a の値が 1 より大きいか小さいかで場合分けが必要になります．また，$a = 1$ のときだけは，$g'(x) = 0$ が重解をもつので，この場合も忘れないようにしましょう．(3) は，3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつための条件を考えます．これは，3 次関数 $y = g(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わるときなので，極大値と極小値が異符号であればよいことがわかります．つまり，

(極大値)> 0 かつ (極小値)< 0

となればよいのですが，(2) で場合分けをしているので，それぞれの場合で考えるのは面倒です．そこで，

(極大値)$\times$(極小値)< 0

とします．これならば，場合分けをする必要がなくなり比較的楽に a の値を求めることができます．ただし，次数が上がるため解答にあるように，確実に符号がわかる部分は，それを利用して次数を下げます．

n を 7 以上の整数とする．1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個の球を袋に入れる．袋から無作為に取り出した 4 個の球の番号がすべて奇数である確率を p_n とする．

(1) p_n を n を用いて表せ．

(2) $p_n < 0.05$ となる n をすべて求めよ．

n を 7 以上の整数とする．1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個の球を袋に入れる．袋から無作為に取り出した 4 個の球の番号がすべて奇数である確率を p_n とする．

（1） p_n を n を用いて表せ．

（2） $p_n < 0.05$ となる n をすべて求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

(1) は，n の偶奇によって場合分けを行います．(2) は，(1) の結果から不等式を計算しましょう．

♣ ♠

解答

（1）

（i） n が奇数のとき，1 から n までの間に奇数は $\dfrac{n+1}{2}$ 個あるので，

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{{}_{\frac{n+1}{2}}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_4} \\
&= \frac{\dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right)\left(\dfrac{n+1}{2}-2\right)\left(\dfrac{n+1}{2}-3\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{16n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)}
\end{aligned}$$

（ii） n が偶数のとき，1 から n までの間に偶数は $\dfrac{n}{2}$ 個あるので，

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{{}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_4} \\
&= \frac{\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\left(\dfrac{n}{2}-3\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{16n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)}
\end{aligned}$$

以上より，求める確率 p_n は，

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)} & (n\text{ が奇数}) \\ \dfrac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)} & (n\text{ が偶数}) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） （1）より，n の偶奇で場合分けをして考える．

（i） n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}
p_n < 0.05 &\iff \frac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)} < \frac{1}{20} \\
&\iff 5(n+1)(n-5) < 4n(n-2) \\
&\iff n(n-12) < 25
\end{aligned}$$

であるから，これを満たす 7 以上の奇数は，$n=7,\ 9,\ 11,\ 13$ のみである．

(ii) n が偶数のとき，

$$\begin{aligned} p_n<0.05 &\iff \frac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)}<\frac{1}{20} \\ &\iff 5(n-4)(n-6)<4(n-1)(n-3) \\ &\iff n(34-n)>108 \end{aligned}$$

であるから，これを満たす 7 以上の偶数は，$n=8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30$ のみである．

以上より，求める 7 以上の自然数 n は，

$$\boldsymbol{n=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

n が偶数のときと奇数のときで p_n の計算方法が異なるため場合分けをする必要があります．このことに気がつけばあとは計算だけなので，方針で悩むことは無いでしょう．(2) では，$p_n<0.05$ を満たす自然数をすべて求めよとあるので，不等式を立式して解けばよいのですが，導かれる 2 次不等式は因数分解して解くことができないので，解の公式で求める必要が出てきます．しかし，考えているのは自然数ですから解の公式で正確な不等式の解を求める必要はありません．出てきた不等式を満たす自然数をすべて探し当てればよいだけです．

a, b は実数とする．関数 $f(x)$ は，$f(x) = a\sin x + b\cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である．このとき，$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$ を最小にする a, b の値と，その最小値を求めよ．

a, b は実数とする．関数 $f(x)$ は，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である．このとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$ を最小にする a, b の値と，その最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分で表された関数

方針

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ は定数なので，A と置きます．そうすれば，A の値を求めることができるため，$f(x)$ が決定できます．

解答

$A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ とおくと，$f(x)=a\sin x+b\cos x+A$ であるから，

$$
\begin{aligned}
A&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t+b\cos t+A)\cos t\,dt\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t\cos t+b\cos^2 t+A\cos t)\,dt
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin t\cos t$ は奇関数，$\cos^2 t, \cos t$ は偶関数であるから，

$$
\begin{aligned}
A&=2\int_{0}^{\pi}(b\cos^2 t+A\cos t)\,dt\\
&=\int_{0}^{\pi}\{b(1+\cos 2t)+2A\cos t\}\,dt\\
&=\left[\,b\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+2A\sin t\,\right]_0^{\pi}\\
&=b\pi
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)=a\sin x+b\cos x+b\pi$ である．

$$
f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+b\pi \quad \left(ただし，\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)
$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{a^2+b^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) \leqq \sqrt{a^2+b^2}\\
&-\sqrt{a^2+b^2}+b\pi \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+b\pi \leqq \sqrt{a^2+b^2}+b\pi\\
&-\sqrt{a^2+b^2}+b\pi \leqq f(x) \leqq \sqrt{a^2+b^2}+b\pi
\end{aligned}
$$

$f(x)$ の最大値は 2π であるから，

$$
\sqrt{a^2+b^2}+b\pi=2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2}=(2-b)\pi \ \cdots\cdots \text{①}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin x+b\cos x+b\pi)^2\,dx\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+b^2\pi^2+2ab\sin x\cos x+2b^2\pi\cos x+2ab\pi\sin x\right)dx\\
&=2\int_{0}^{\pi}\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+b^2\pi^2+2b^2\pi\cos x\right)dx\\
&=2\int_{0}^{\pi}\left(a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+b^2\pi^2+2b^2\pi\cos x\right)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\ \frac{a^2}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{b^2}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + b^2\pi^2 x + 2b^2\pi\sin x\ \right]_0^\pi \\
&= 2\left(\frac{a^2}{2}\pi + \frac{b^2}{2}\pi + b^2\pi^3\right) \\
&= (a^2+b^2)\pi + 2b^2\pi^3 \\
&= (2-b)^2\pi^3 + 2b^2\pi^3 \quad (\because\ ①) \\
&= \pi^3(3b^2-4b+4) \\
&= \pi^3\left\{3\left(b^2-\frac{4}{3}b\right)+4\right\} \\
&= \pi^3\left\{3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，$b=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ は最小値 $\dfrac{8}{3}\pi^3$ をとる．また，このとき，① から a の値は，

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2=(2-b)^2\pi^2 \iff a^2 &= (2-b)^2\pi^2 - b^2 \\
&= \left(2-\frac{2}{3}\right)^2\pi^2 - \frac{4}{9} \\
&= \frac{16}{9}\pi^2 - \frac{4}{9} \\
&= \frac{4}{9}(4\pi^2-1)
\end{aligned}
$$

よって，$a=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1}$ である．

以上より，

最小値：$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}\pi^3}$　$\boldsymbol{\left(a=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1},\ \ b=\dfrac{2}{3}\right)}$……(答)

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

解説

前半は，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ が定数であることがポイントです．定数ということは x とは無関係なので，A とおきます．そうすると $f(x)$ が A を用いて表せるので，この $f(x)$ を $f(t)$ として，$A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ へ代入すれば A の値が求まります．教科書レベルの問題なので，確実にできるようにしておきましょう！ $f(x)$ が決まれば，最大値が 2π という条件から a, b に関する関係式が求められます．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ を計算すると a, b の式になるため，先ほど求めた a, b の関係式を用いて a を消去すれば b に関する式となり，最小値を求めることができるようになります．方針を立てるのに戸惑うかもしれませんが，与えられた条件をうまく使って一つずつ処理をしていきましょう！

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

（1）　一般項 b_n を求めよ．

（2）　すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\quad b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 一般項 b_n を求めよ．

(2) すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，$t=\sin\theta$ と置換しても積分できますが，$\dfrac{1}{n}e^{n\sin\theta}$ を微分すると $e^{n\sin\theta}\cos\theta$ になることを利用することもできます．(2) は，積分区間に着目して不等式を作ります．(3) は，(2) の不等式を用いてはさみうちの原理を用います．

♣ ♠

解答

(1) $\displaystyle b_n=\left[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle\quad =\boldsymbol{\frac{e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}}{n}}$ ……(答)

(2) **【証明】**

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，各辺に $e^{n\sin\theta}>0$ をかけると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta\leqq e^{n\sin\theta}$$

よって，

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\,d\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n\quad\Longleftrightarrow\quad b_n\leqq a_n\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}b_n$$

ゆえに，示された． **(証明終)**

(3) (2) で示した不等式の各辺に $n>0$ をかけると，$nb_n\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$ となり，この各辺は正であるから，各辺の自然対数をとると，

$$\log(nb_n)\leqq\log(na_n)\leqq\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n\right)$$

(1) より，

$$\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\leqq\log(na_n)\leqq\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\quad(\because\ \ n>0)$$

$$\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}\ \cdots\cdots ①$$

ここで,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\log\left\{e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\log\left\{e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\log e^{\frac{1}{2}}+\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり,$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}=0$ であるから,① 式において $n\to\infty$ とすれば,はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は,置換積分を用いる方法もありますが,解答のように原始関数を見つけることができれば容易に計算できます.すなわち,

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx=e^{f(x)}+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

を利用しています.(2) は,積分区間に着目して不等式を作ります.注意したい点は,自然対数をとりたいので,不等式の各辺が正であることを確認しておくことです.これは真数条件を満たしていることを確認していることになります.頻出問題なので,できるようにしておきたい問題です.(3) は,不等式を証明した後で極限を求めるので,はさみうちの原理を用います.$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}$ の計算は,$e^{-n}\to 0$, $\dfrac{1}{n}\to 0$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty}\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}=\log 1=0$$

となります.