n を自然数，a を正の実数とし，曲線 $C : y = \frac{1}{a}x^{n+1} - x$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積が $\frac{1}{2}$ となるとき，a を n を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた a を第 n 項 a_n とする数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ を考える．$b_n = a_{2n}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ および $c_n = a_{2n-1}$ で定義される数列 $\{c_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

n を自然数，a を正の実数とし，曲線 $C : y = \dfrac{1}{a}x^{n+1} - x$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{1}{2}$ となるとき，a を n を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた a を第 n 項 a_n とする数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を考える．$b_n = a_{2n}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ および $c_n = a_{2n-1}$ で定義される数列 $\{c_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

【テーマ】：面積と極限

方針

(1) では，n の偶奇によって $y=0$ となる x の値が異なるので，場合分けを行います．(2) では，極限値を求める際に，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ を用います．

♣　♠

解答

(1)　$y = \dfrac{1}{a}x(x^n - a)$ である．

(i)　n が奇数のとき，$y=0$ となる x の値は，$x=0$, $\sqrt[n]{a}$ であるから，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，$0 < x < \sqrt[n]{a}$ において $y<0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\sqrt[n]{a}} \left(-\frac{1}{a}x^{n+1} + x\right) dx \\
&= -\frac{1}{a}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (x^{n+1} - ax)\, dx \\
&= -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^{\sqrt[n]{a}} \\
&= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+2}a^{\frac{n+2}{n}} - \frac{a}{2}a^{\frac{2}{n}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)a^{\frac{2}{n}} \\
&= \frac{n}{2(n+2)}a^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}
$$

である．$S = \dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2(n+2)}a^{\frac{2}{n}} \iff a = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

である．

(ii)　n が偶数のとき，$y=0$ となる x の値は，$x=0$, $\pm\sqrt[n]{a}$ であり，曲線 C は y 軸に関して対称であるから，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を T とすると，

$$T = 2S = \frac{n}{n+2}a^{\frac{2}{n}} \quad (\because \text{(i)})$$

である．$T = \dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{n+2}a^{\frac{2}{n}} \iff a = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

である．

以上より，求める a の値は，

$$\boldsymbol{a}=\begin{cases}\left(\dfrac{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} & (\boldsymbol{n}\text{ が奇数のとき})\\ \left(\dfrac{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{2n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} & (\boldsymbol{n}\text{ が偶数のとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より,

$$a_n=\begin{cases}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} & (n\text{ が奇数のとき})\\ \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

であるから,

$$b_n=a_{2n}=\left(\frac{2n+2}{2\cdot 2n}\right)^{\frac{2n}{2}}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

したがって,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

また,

$$c_n=a_{2n-1}=\left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}c_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\\&=\boldsymbol{e}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は,面積を計算する問題ですが,曲線 C と x 軸との位置関係が分かればよいので,微分をしてきちんとしたグラフを考える必要はありません.解答では,$0<x<\sqrt[n]{a}$ において $y<0$ であると一言述べています.n の偶奇による場合分けに気付けるかどうかがポイントです.(2) は,極限の計算なので,次の自然対数の底に関する極限を利用します.

【自然対数の底に関する極限】

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

これらの公式は,置き換えを行うことで同値であることが証明できる.

原点を O とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 2)$ をとり，方程式 $z=-1$ で表される平面を α とする．$t>2$ とするとき，点 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ t)$ を考える．4 つの直線 PO, PA, PB, PC と平面 α との交点をそれぞれ D, E, F, G とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, t を用いて表せ．

（2） 点 G が $\triangle\mathrm{DEF}$ の周または内部にあるように，t の値の範囲を定めよ．

原点を O とする座標空間に 3 点 A(2, 0, 0), B(0, 3, 1), C(1, 1, 2) をとり，方程式 $z=-1$ で表される平面を α とする．$t>2$ とするとき，点 P(2, 1, t) を考える．4 つの直線 PO, PA, PB, PC と平面 α との交点をそれぞれ D, E, F, G とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, t を用いて表せ．

(2) 点 G が △DEF の周または内部にあるように，t の値の範囲を定めよ．

【テーマ】：空間ベクトルと点の存在範囲

方針

(1) は，ベクトル方程式を考えて平面 $z=-1$ との交点を求めます．(2) は (1) の結果を用いて，点が三角形の周および内部にある条件を利用して t の範囲を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 直線 PO, PA, PB, PC 上の任意の点をそれぞれ W, X, Y, Z とすると，直線 PO, PA, PB, PC のベクトル方程式は，実数 k_1, k_2, k_3, k_4 を用いて次のように表せる．

直線 PO ： $\overrightarrow{\mathrm{OW}}=k_1\overrightarrow{\mathrm{PO}}$

直線 PA ： $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k_2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

直線 PB ： $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k_3\overrightarrow{\mathrm{BP}}$

直線 PC ： $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k_4\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

成分で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OW}}=(2k_1,\ k_1,\ k_1t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(2,\ k_2,\ k_2t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(2k_3,\ 3-2k_3,\ 1+k_3(t-1))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=(1+k_4,\ 1,\ 2+k_4(t-2))$$

となり，これらの直線と平面 $z=-1$ との交点がそれぞれ D, E, F, G であるから，z 成分を -1 とすれば，

$$k_1=-\frac{1}{t},\quad k_2=-\frac{1}{t},\quad k_3=-\frac{2}{t-1},\quad k_4=-\frac{3}{t-2}$$

である．ゆえに，点 D, E, F, G の座標は，

$$\mathrm{D}\left(-\frac{2}{t},\ -\frac{1}{t},\ -1\right),\ \mathrm{E}\left(2,\ -\frac{1}{t},\ -1\right),\ \mathrm{F}\left(-\frac{4}{t-1},\ \frac{3t+1}{t-1},\ -1\right),\ \mathrm{G}\left(\frac{t-5}{t-2},\ 1,\ -1\right)$$

である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=p\overrightarrow{\mathrm{ED}}+q\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ とおくと，これを成分表示して，

$$\left(\frac{t-5}{t-2}-2,\ 1+\frac{1}{t},\ 0\right)=p\left(-\frac{2}{t}-2,\ 0,\ 0\right)+q\left(\frac{-4}{t-1}-2,\ \frac{3t+1}{t-1}+\frac{1}{t},\ 0\right)$$

となる．ゆえに，成分を比較すると，

$$\begin{cases} \dfrac{t-5}{t-2}-2=\left(-\dfrac{2}{t}-2\right)p+\left(\dfrac{-4}{t-1}-2\right)q \\ 1+\dfrac{1}{t}=\left(\dfrac{3t+1}{t-1}+\dfrac{1}{t}\right)q \end{cases}$$

となる．これを解くと，

$$p=\frac{t(t+3)}{2(3t-1)(t-2)},\quad q=\frac{t-1}{3t-1}$$

となる．したがって，

$$\overrightarrow{\mathbf{EG}}=\frac{\boldsymbol{t(t+3)}}{\mathbf{2(3}\boldsymbol{t}\mathbf{-1)(}\boldsymbol{t}\mathbf{-2)}}\overrightarrow{\mathbf{ED}}+\frac{\boldsymbol{t}\mathbf{-1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{t}\mathbf{-1}}\overrightarrow{\mathbf{EF}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$t>2$ であることから，$p>0,\ q>0$ である．よって，点 G が △DEF の周または内部にあるための条件は，

$$p+q\leqq 1$$

である．したがって，

$$\frac{t(t+3)}{2(3t-1)(t-2)}+\frac{t-1}{3t-1}\leqq 1$$

$t>2$ であるから，両辺に $2(3t-1)(t-2)>0$ をかけると，

$$t(t+3)+2(t-2)(t-1)\leqq 2(3t-1)(t-2)\quad\Longleftrightarrow\quad t(3t-11)\geqq 0$$

$t>2$ より，求める t の値の範囲は，

$$\boldsymbol{t}\geqq\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

文字計算なので，計算量が多く計算力が要求されています．(1) では，点 D, E, F, G の座標をどのようにして考えるかがポイントになりますが，空間座標で考えているので，ベクトル方程式を用いるのがよいでしょう．そうすれば，平面 $z=-1$ との交点を求めたいので，z 座標を -1 にすればよいですし，もしもこの平面が，$x+y+z=1$ などとなっていても，これに代入をして $k_i(i=1,2,3,4)$ の値を求めればよいので，応用がききます．(2) では，点が三角形の周および内部にあるための条件なので，次の基本事項 (iii) を用います．

【ベクトルの終点の存在範囲】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする．また，s，t を実数の変数とする．s，t に条件があると，次のような図形を表す．

(i)	**直線** AB	$s+t=1$
(ii)	**線分** AB	$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
(iii)	△OAB **の周および内部**	$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
(iv)	OA, OB **を** 2 **辺とする平行四辺形** OACB **の周および内部**	$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし，A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ $\ell_{\mathrm{A}},\ \ell_{\mathrm{B}}$ とする．2 直線 $\ell_{\mathrm{A}},\ \ell_{\mathrm{B}}$ ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする．いま，$D_1,\ D_2$ をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha),\ V_2(\alpha)$ とする．

(1)　$V_1(\alpha),\ V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ．

(2)　α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ．

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0, \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし，A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_{A}, ℓ_{B} とする．2 直線 ℓ_{A}, ℓ_{B} ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする．いま，D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$, $V_2(\alpha)$ とする．

(1)　$V_1(\alpha)$, $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ．

(2)　α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，グラフをかいて状況を判断し，グラフの対称性を用いて計算をします．計算量が多いので，正確な計算をしましょう．(2) は，微分をするだけですが，$t=\cos\alpha$ と置けば 3 次関数の微分ですむので計算が楽になります．もちろん，置き換えをしたので，t の範囲に注意しましょう．

♣　♠

解答

(1)　C_2 の方程式は，

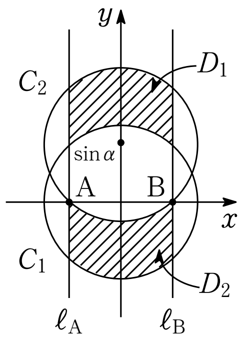
$$x^2+(y-\sin\alpha)^2=1$$

である．よって，x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ として，

$$x^2=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

$$\therefore\quad x=\pm\cos\alpha$$

であるから，$\mathrm{A}(-\cos\alpha, 0)$，$\mathrm{B}(\cos\alpha, 0)$ と置くことができる．



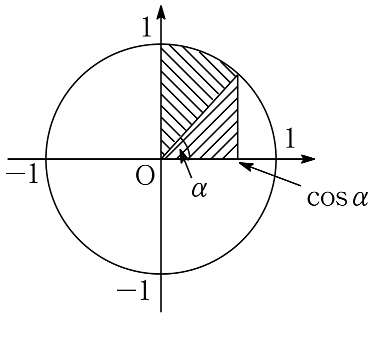
領域 D_1, D_2 は，右図斜線部分（境界を含む）であり，C_2 について，

$$x^2+(y-\sin\alpha)^2=1 \iff y=\sin\alpha\pm\sqrt{1-x^2}$$

であるから，y 軸に関する対称性より，

$$\begin{aligned}
V_1(\alpha)&=2\int_0^{\cos\alpha}\left\{\pi\left(\sin\alpha+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\pi(1-x^2)\right\}dx\\
&=2\pi\int_0^{\cos\alpha}\left(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\right)dx \cdots\cdots ①\\
&=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+4\pi\sin\alpha\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，定積分 $\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値は，右図の斜線部分（扇形と直角三角形を合わせた部分）の面積に等しいことから，



$$\begin{aligned}
\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx&=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$V_1(\alpha)=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+4\pi\sin\alpha\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$
$$=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi^2\sin\alpha-2\pi\alpha\sin\alpha+2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$=\boldsymbol{4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi(\pi-2\alpha)\sin\alpha}\cdots\cdots(\text{答})$$

また，

$$V_2(\alpha)=2\int_0^{\cos\alpha}\left\{\pi(1-x^2)-\pi\left(\sin\alpha-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx$$
$$=2\pi\int_0^{\cos\alpha}\left(-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\right)dx\cdots\cdots②$$

であるから，①, ② より，

$$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)=2\pi\int_0^{\cos\alpha}(2\sin^2\alpha)\,dx$$
$$=\boldsymbol{4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$f(\alpha)=4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$ とおくと，

$$f(\alpha)=4\pi(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

であるから，$\cos\alpha=t$ とおくと，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<t<1$ であり，

$$f(\alpha)=4\pi(1-t^2)t=4\pi(t-t^3)$$

である．$g(t)=t-t^3$ とおくと，$g'(t)=1-3t^2$ であるから，$g'(t)=0$ のとき，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（$\because$　$0<t<1$）である．したがって，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$g(t)$ は最大値

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

をとるので，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$f(\alpha)$ は最大値

$$\boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

◇　　♡

解説

円と円で囲まれた部分の面積を求めるので，円の方程式を $y=f(x)$ の形に変形して考えます．$x^2+y^2=1$ は $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ のようにかけますが $+$ のときが円の上半分で，$-$ のときが円の下半分を表しています．また，このことから，(1) の面積を計算する途中で出てきた定積分 $\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値は，円を考えれば，扇形と三角形の面積の和として求めることができます．もちろん，$x=\sin\theta$ と置換積分をしても求めることができます．(1) の後半の $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ は，$V_2(\alpha)$ を求めてから計算するよりも，①, ② のように定積分の計算途中を用いると計算が楽になります．計算力だけでなく上手に計算する術も身に付けておきましょう．(2) は，最大値を求める基本計算なので，(1) ができたのなら完答したい問題です．$\cos\alpha=t$ と置換すれば解答のように 3 次関数に帰着できますが，そのまま微分をしてもたいした計算量の差にはならないです．

実数 θ に対し，座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$ を考える．次の問いに答えよ.

（1） 点 A, B と原点 O の 3 点は同一直線上にないことを示せ.

（2） 三角形 OAB の面積 S を $\sin\theta$ を用いて表せ.

（3） θ が実数全体を動くとき，（2）で求めた S の最大値と最小値を求めよ.

実数 θ に対し，座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 点 A, B と原点 O の 3 点は同一直線上にないことを示せ．

(2) 三角形 OAB の面積 S を $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) θ が実数全体を動くとき，(2) で求めた S の最大値と最小値を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 k が存在しないことを示します．(2) は，ベクトルを用いた三角形の面積公式を利用します．(3) は，$t = \sin\theta$ と置いて，t の 6 次関数の最大値・最小値を考えます．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

3 点 O, A, B が一直線上にあると仮定すると，0 でない実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) = k(0,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$$

と表すことができる．各成分を比較して，

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = k\sin 2\theta \\ 0 = k\cos 2\theta \end{cases}$$

$k \neq 0$ であるから，$\cos 2\theta = 0$ となり，

$$\cos 2\theta = 0 \iff 2\cos^2\theta - 1 = 0$$

と $\cos\theta = 0$ より，これらを満たす θ は存在しない．ゆえに，実数 k は存在しないので，3 点 O, A, B は一直線上にないことが示された．　**(証明終)**

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \sin\theta\sin 2\theta$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-(\sin\theta\sin 2\theta)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^4\theta\cos^2\theta} \qquad (\because\ \ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^6\theta - 4\sin^4\theta + 1}} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\sin\theta = t$ とおくと，θ が実数全体を動くので，$-1 \leqq t \leqq 1$ である．したがって，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4t^6 - 4t^4 + 1} \cdots\cdots ①$$

である．$f(t) = 4t^6 - 4t^4 + 1$ とおくと，

$$f'(t) = 24t^5 - 16t^3 = 8t^3(3t^2 - 2)$$

となるので，$f'(t)=0$ のとき，$t=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ である．$y=f(t)$ は偶関数であるから $0 \leqq t \leqq 1$ で考えると，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{11}{27}$	$\nearrow$	1

よって，$f(t)$ の最大値・最小値は，

$$\begin{cases} \text{最大値} & 1 \\ \text{最小値} & \dfrac{11}{27} \end{cases}$$

であるから，S の最大値・最小値は，① より，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \textbf{最小値} & \dfrac{\sqrt{\mathbf{33}}}{\mathbf{18}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，背理法で示していますが，(3) で $\triangle$OAB の面積が 0 になることがないことからも 3 点 O, A, B が一直線上にないことがわかります．(2) では，空間図形なので，ベクトルを用いた三角形の面積公式が有効活用できます．(3) では，$\sqrt{}$ 内を取り出して，$t=\sin\theta$ と置き，6 次関数の最大値・最小値を考えます．なお，最大値・最小値をとるときの θ の値は求めることができないので，求める必要はありません．

$f_n(x)=\cos^n x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2},\ n=1,2,\cdots\right)$ とし，曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とする．点 Q の y 座標を最大にする点 P の x 座標を a_n とし，そのときの点 Q の y 座標を b_n とおく．次の問いに答えよ.

（1） $\sin a_n$，$\cos a_n$ をそれぞれ n を用いて表せ.

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

$f_n(x) = \cos^n x \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ n = 1, 2, \cdots\right)$ とし，曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とする．点 Q の y 座標を最大にする点 P の x 座標を a_n とし，そのときの点 Q の y 座標を b_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\sin a_n$，$\cos a_n$ をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

点 P の x 座標を t として，点 P における接線と y 軸との交点を求めます．t を変数として点 Q の y 座標のとり得る値の範囲を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 点 P の x 座標を t とする．$f_n'(x) = n\cos^{n-1} x(-\sin x)$ であるから，点 P における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -n\cos^{n-1} t\sin t(x-t) + \cos^n t \\ &= -(n\cos^{n-1} t\sin t)x + nt\cos^{n-1} t\sin t + \cos^n t \end{aligned}$$

よって，点 Q の y 座標は，

$$y = nt\cos^{n-1} t\sin t + \cos^n t$$

である．

$$\begin{aligned} y' &= n\cos^{n-1} t\sin t + nt(n-1)\cos^{n-2} t(-\sin t)\sin t + nt\cos^n t + n\cos^{n-1} t(-\sin t) \\ &= n\cos^{n-1} t\sin t - n(n-1)t\cos^{n-2} t(1-\cos^2 t) + nt\cos^n t - n\cos^{n-1} t\sin t \\ &= -n(n-1)t\cos^{n-2} t + n(n-1)t\cos^n t + nt\cos^n t \\ &= -n(n-1)t\cos^{n-2} t + n^2 t\cos^n t \\ &= -nt\cos^{n-2} t(n-1-n\cos^2 t) \end{aligned}$$

より，$y' = 0$ のとき，$t \neq 0, \cos t \neq 0$ なので，$\cos t = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ $\cdots$ ① である．

$0 < \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} < 1$ より，① を満たす t が $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ でただ 1 つ存在する．この t の値を α_n とすると，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	α_n	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$t = \alpha_n$ のとき，最大値をとるので，$a_n = \alpha_n$ である．したがって，

$$\cos a_n = \sqrt{\boldsymbol{\frac{n-1}{n}}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

このとき，$\sin a_n > 0$ より，

$$\sin a_n = \sqrt{1-\cos^2 a_n} = \sqrt{1-\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{1}{n}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2）（1）より，

$$\begin{aligned} b_n &= na_n\cos^{n-1}a_n\sin a_n + \cos^n a_n \\ &= na_n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \sqrt{n}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{a_n}{\sin a_n}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sin a_n} = \lim_{a_n\to 0}\frac{a_n}{\sin a_n} = 1$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ より，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 + e^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{e}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

（1）は，接線の y 座標が最大となるような接点 P の x 座標の正弦と余弦を求める問題です．a_n は具体的に求めることはできないので，$y'=0$ となるような実数 t がただ 1 つあることを述べておいて，文字で代用する方法をとります．ポイントは，$y'=0$ を満たす実数 t がただ 1 つしかないことをきちんと記述しておくことです．三角関数なので，1 つの正弦・余弦の値に対して角度は複数あるからです．ここでは，t の値の範囲からただ 1 つであることが分かります．それさえ分かれば，増減表がかけるので $t=\alpha_n$ で最大値をとることが分かります．

（2）は，数列の極限の問題です．三角関数の極限と，自然対数の底 e に関する極限なので，不慣れな人は式変形で戸惑うかもしれません．式変形がきちんとできるように演習を積んでおきましょう．

【自然対数の底に関する極限】

（i）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　（ii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

（iii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　　（iv）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

これらの公式は，置き換えを行うことで同値であることが証明できる．

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とし,

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) n を 2 以上の自然数とするとき,

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ.

(2) 曲線 $y = c_1 x^3 - c_3 x^2 - c_2 x + c_4$ の極値を求めよ.

(3) 曲線 $y = c_1 x^2 - c_3 x + c_2$ と, x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とし，

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ．

(2)　曲線 $y = c_1x^3 - c_3x^2 - c_2x + c_4$ の極値を求めよ．

(3)　曲線 $y = c_1x^2 - c_3x + c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，α, β が 2 次方程式の解であることを利用して式を導くことができます．(2), (3) は，(1) で求めた漸化式から c_1, c_2, c_3, c_4 の値を求めることができるので，後は微分と積分を利用します．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解が α, β であるから，

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \quad \cdots\cdots \quad ①$$
$$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

を満たす．①$\times\alpha^{n-1}$ + ②$\times\beta^{n-1}$ より，

$$\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} = 0$$
$$\beta^{n+1} - \beta^n - \beta^{n-1} = 0$$

辺々を加えると，

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - (\alpha^n + \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = 0$$
$$c_{n+1} - c_n - c_{n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となり，示された．　**（証明終）**

(2)　解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ であるから，

$$c_1 = \alpha + \beta = 1$$
$$c_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$$
$$c_3 = c_2 + c_1 = 4$$
$$c_4 = c_3 + c_2 = 7$$

であるから，与えられた曲線を表す方程式は，$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ となる．

$$y' = 3x^2 - 8x - 3 = (3x + 1)(x - 3)$$

より，$y' = 0$ のとき，$x = -\dfrac{1}{3},\ 3$ である．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ のとき，}\quad y = -\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + 1 + 7 = \frac{203}{27}$$
$$x = 3 \text{ のとき，}\quad y = 27 - 36 - 9 + 7 = -11$$

よって，極大値と極小値は，

$$\begin{cases} \textbf{極大値：}\boldsymbol{\dfrac{203}{27}} \quad \left(\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{3}}\right) \\ \textbf{極小値：}\boldsymbol{-11} \quad (\boldsymbol{x = 3}) \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) **から，与えられた曲線を表す方程式は，**$y = x^2 - 4x + 3$ **となる．**x **軸との交点の** x **座標は，**

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0$$

であるから $x = 1,\ 3$ **である．よって，求める面積を** S **とすると，**

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{-(x^2 - 4x + 3)\}\,dx \\ &= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(3-1)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

様々な分野が融合している問題ですが，どれも基本的なものです．ただ，(1) **は様々な解答方法があるので，**(1) **の出来具合が大きく得点を左右しそうです．本解は，方程式の解を利用しました．この方法は，**3 **次式などになっても有効な方法なので，応用が効きます．**(2), (3) **は微分積分の基本問題なので，確実にとりたい問題です．**

複素平面上で

$$z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0, \quad z_2 = -\frac{1}{z_0}$$

を表す点をそれぞれ $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ とする．

(1) z_1 を極形式で表せ．

(2) z_2 を極形式で表せ．

(3) 原点 O, $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ．

複素平面上で

$$z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),\quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0,\quad z_2 = -\frac{1}{z_0}$$

を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 **とする．**

(1)　z_1 **を極形式で表せ．**

(2)　z_2 **を極形式で表せ．**

(3)　**原点** O, P_0, P_1, P_2 **の** 4 **点が同一円周上にあるときの** z_0 **の値を求めよ．**

【テーマ】：複素数の基本計算

方針

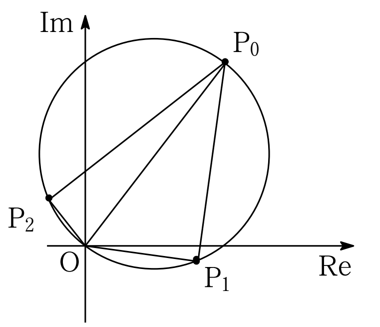
(1), (2) **は極形式の基本的な性質から求められます．**(3) **は，図形的な意味を考えながら円を見つけましょう．**

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &= \boldsymbol{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} z_2 &= (-1+i\cdot 0)\cdot\frac{1}{z_0} \\ &= (\cos\pi+i\sin\pi)\cdot\frac{1}{2}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$



(3)　$OP_0 = 2,\ OP_1 = 1$ **であり，**

$$\angle P_0OP_1 = \arg\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \theta - \left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

である．したがって，$\angle OP_1P_0 = \dfrac{\pi}{2}$ **であるから，**OP_0 **は** 4 **点** O, P_0, P_1, P_2 **を通る円の直径となっている．**

$$\angle P_0OP_2 = \arg\left(\frac{z_2}{z_0}\right) = (\pi-\theta)-\theta = \pi-2\theta$$

であり，$\angle P_0P_2O = \dfrac{\pi}{2}$ **であることから，**

$$\cos(\pi-2\theta) = \frac{OP_2}{OP_0} = \frac{1}{4}$$

である．したがって，

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{4} \iff 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{1}{4} \iff \cos^2\theta = \frac{3}{8}$$

よって，

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4},\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

であるから，

$$\boldsymbol{z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}i}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1), (2) は，極形式に関する基本的な問題です．(1) での偏角は，$\theta+\dfrac{5}{3}\pi$ でも問題ありません．これより，$\angle \mathrm{P_0OP_1}=\dfrac{\pi}{3}$ となることに気付きましょう．(3) では，その角と辺の比から直角三角形を見つけ出せるかどうかがポイントとなります．図を考えるときには特殊な状況が隠れていないかどうかのチェックができるようになっておくとよいですね．

【極形式】

複素数平面上の点 z は，原点からの距離 r とし，実軸の正の方向とのなす角を反時計回りに θ とすると，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる．これを複素数 z の極形式といい，θ を偏角という．偏角 θ は，

$$\theta=\arg z$$

と表す．極形式には，次の性質がある．

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

（i） $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \Longrightarrow \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

（ii） $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \Longrightarrow \arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$

1 つの角が 120° の三角形がある．この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x < y < z$ を満たす整数である．

(1) $x + y - z = 2$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ．

(2) $x + y - z = 3$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ．

(3) $a,\ b$ を 0 以上の整数とする．$x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ．

1 つの角が 120° の三角形がある．この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x<y<z$ を満たす整数である．

(1)　$x+y-z=2$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ．

(2)　$x+y-z=3$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ．

(3)　$a,\ b$ を 0 以上の整数とする．$x+y-z=2^a3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ．

【テーマ】：整数問題

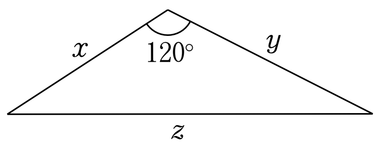
方針

(1), (2) は，余弦定理を用いて $x,\ y,\ z$ の関係式を導き，与えられた条件式を代入することで z を消去します．
(3) は，(1), (2) と同様に考えますが，$x<y<z$ であることを利用して個数を計算しましょう．

♣　♠

解答

(1)　与えられた三角形は右図のようになるので，余弦定理より，



$$\begin{aligned} z^2 &= x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ \\ &= x^2+y^2+xy \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．ここで，$x+y-z=k$ のとき，① へ代入して z を消去すると，

$$\begin{aligned} (x+y-k)^2=x^2+y^2+xy &\iff x^2+y^2+k^2+2xy-2kx-2ky=x^2+y^2+xy \\ &\iff xy-2kx-2ky+k^2=0 \\ &\iff (x-2k)(y-2k)=3k^2 \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

となる．$k=2$ のとき，② より，

$$(x-4)(y-4)=12 \cdots\cdots ③$$

であり，$0<x<y$ であることから，$-4<x-4<y-4$ となる．$x-4,\ y-4$ はともに整数であることから ③ を満たす整数 $x-4,\ y-4$ の組合せは，次の 3 通りがある．

$x-4$	1	2	3
$y-4$	12	6	4

$\xrightarrow{z=x+y-2}$

x	5	6	7
y	16	10	8
z	19	14	13

これらはともに $x<y<z$ を満たしている．よって，求める $x,\ y,\ z$ の組は，

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\mathbf{5,\ 16,\ 19}),\ (\mathbf{6,\ 10,\ 14}),\ (\mathbf{7,\ 8,\ 13})\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)　$k=3$ のとき，② より，

$$(x-6)(y-6)=27 \cdots\cdots ④$$

であり，$0<x<y$ であることから，$-6<x-6<y-6$ となる．$x-6,\ y-6$ はともに整数であることから ④ を満たす整数 $x-6,\ y-6$ の組合せは，次の 2 通りがある．

$x-6$	1	3
$y-6$	27	9

$\xrightarrow{z=x+y-3}$

x	7	9
y	33	15
z	37	21

これらはともに $x<y<z$ を満たしている．よって，求める x, y, z の組は，

$$\boldsymbol{(x, y, z)=(7, 33, 37), (9, 15, 21)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

(3)　$k=2^a3^b$ のとき，② より，

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\ \cdots\cdots\ ④$$

であり，$0<x<y$ であることから，$-2^{a+1}3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b$ となる．$x-2^{a+1}3^b$, $y-2^{a+1}3^b$ はともに整数であるから，かけて $2^{2a}3^{2b+1}$ となる 2 つの整数の組合せを考える．ここで，$X=x-2^{a+1}3^b$, $Y=y-2^{a+1}3^b$ とおき，$X<Y<0$ となる整数 X, Y の組合せを考える．このとき，$-X=X'$, $-Y=Y'$ とすると，④ と $-2^{a+1}3^b<X<Y<0$ より，

$$X'Y'=2^{2a}3^{2b+1},\quad 0<Y'<X'<2^a3^b$$

である．したがって，

$$2^{2a}3^{2b+1}=X'Y'<(X')^2<2^{2a}3^{2b}$$

となり，矛盾するので，$0<X<Y$ となる組合せのみを考えればよい．このとき，X, Y の 1 組に対して x, y も 1 組あるので，X, Y の組数を求めればよい．

$$XY=2^{2a}3^{2b+1}$$

を満たす正の整数 X, Y は $2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数に等しいので，

$$(2a+1)(2b+2)\ (個)$$

ある．$X\neq Y$ であり，$X<Y$, $X>Y$ となるものが同数存在することから，求める個数は，

$$\boldsymbol{(2a+1)(b+1)}\ \textbf{(個)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇　♡

解説

(1), (2) は，基本的な不定方程式の問題なので，完答をねらいたい問題です．(3) を解く際に，(1), (2) で『負の整数の組の存在の有無』と『右辺の整数の約数』について注意が配れたかどうかがポイントになります．本問のように不定方程式を解く際は，かけて整数となるような 2 数の組合せを考えます．一般には，右辺の約数を書き並べればよいのですが，大小と正負を考えなければいけません．これらを吟味するだけで書き出す場合の数は劇的に減ることがあります．大小は問題文で $x<y<z$ と与えられているので，必然的に注意ができます．負の数の存在は，仮に無視していても答えには出てこないので，正解しているように錯覚します．しかし，負の数の議論が本問の一番のポイントとなる (3) では，負の数を除外するための記述がないと減点は避けられないでしょう．

$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\beta = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ とおく.

（1） 任意の正整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを証明せよ.

（2） 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[\,r\,]$ で表し，r の小数部分 $\{r\}$ を $\{r\} = r - [\,r\,]$ と定義する．このとき，2 個の極限値 $\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n}\}$, $\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n+1}\}$ を求めよ.

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ とおく．

（1） 任意の正整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は整数であることを証明せよ．

（2） 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[\,r\,]$ で表し，r の小数部分 $\{r\}$ を $\{r\}=r-[\,r\,]$ と定義する．このとき，2 個の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha^{2n}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha^{2n+1}\}$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は数学的帰納法で証明します．(2) は $-\dfrac{1}{2}<\beta<0$ を利用することがポイントとなります．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

与えられた α, β から，

$$\alpha+\beta=\frac{3+\sqrt{13}}{2}+\frac{3-\sqrt{13}}{2}=3$$

$$\alpha\beta=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{13}}{2}=-1$$

である．一方，

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$$

であるから，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと，

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+a_n \cdots\cdots ①$$

が成り立つことが分かる．a_n が任意の正整数に対して整数であることを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=3$ であり，$n=2$ のとき，

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=11$$

であるから，$n=1, 2$ のとき，a_n は整数である．

(ii) $n=k, k+1$ $(k\geqq 1)$ のとき，a_k, a_{k+1} が整数であると仮定すると，① の漸化式から，a_{k+2} は整数となる．したがって，$n=k+2$ のときも a_n は整数である．

ゆえに，数学的帰納法によって a_n は整数であることが示された． **（証明終）**

（2） $a_{2n}=\alpha^{2n}+\beta^{2n}$ であり，(1) より，a_{2n} は整数である．

$$\alpha^{2n}=a_{2n}-\beta^{2n} \cdots\cdots ②$$

である．ここで，$3<\sqrt{13}<4$ より，

$$-\frac{1}{2}<\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0 \iff -\frac{1}{2}<\beta<0$$

であるから，

$$0<\beta^{2n}<\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n},\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}<\beta^{2n+1}<0 \cdots\cdots ③$$

となる．したがって，

$$[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]=a_{2n}-1\ ,\quad [\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]=a_{2n+1}$$ ☞ 解説

である．ゆえに，② より，

$$\begin{aligned}\{\alpha^{2n}\}&=\{a_{2n}-\beta^{2n}\}\\&=a_{2n}-\beta^{2n}-[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]\\&=a_{2n}-\beta^{2n}-(a_{2n}-1)\\&=1-\beta^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\alpha^{2n+1}\}&=\{a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\}\\&=a_{2n+1}-\beta^{2n+1}-[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]\\&=a_{2n+1}-\beta^{2n+1}-a_{2n+1}\\&=-\beta^{2n+1}\end{aligned}$$

③ より，$n\to\infty$ のとき，$\beta^{2n}\to0$，$\beta^{2n+1}\to0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n}\}=\mathbf{1}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n+1}\}=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

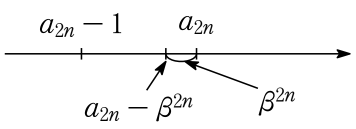
解説

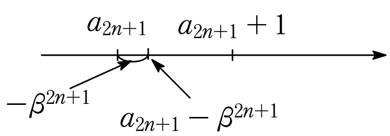
(1) は，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ が整数ならば $\alpha^n+\beta^n$ は整数であるということを示す有名問題で漸化式を作ることができれば容易に示せます．隣接 3 項間漸化式を用いて数学的帰納法で示すので，前 2 つの項の情報が必要になります．したがって，2 つ仮定しなければいけないので注意しましょう．

(2) は，類題を経験していれば比較的方針が立て易いですが，経験がないと難しいと感じる問題ではないでしょうか．2003 年東京大学に類題があります．ポイントは，

$$|\,r\,|<1 \text{ ならば } |\,r^n\,|<1 \text{ なので，} \lim_{n\to\infty}r^n=0$$

が成り立つことです．③ 式から，β^{2n} は 0 より大きく 1 より小さい実数であることがわかります．したがって，$a_{2n}-\beta^{2n}$ は a_{2n} より，少しだけ小さくなります（下左図参照）．ゆえに，$[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]=a_{2n}-1$ となります．$[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]$ も同様に考えることができます．$0<-\beta^{2n+1}<1$ なので，$a_{2n+1}-\beta^{2n+1}$ は a_{2n+1} より少しだけ大きくなります（下右図参照）．したがって，$[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]=a_{2n+1}$ となります．





$\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ.

$\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ$ を示せ．

【テーマ】：高次方程式と三角関数

方針

$\tan 10^\circ = x$ とおいて，考えます．

♣ ♠

解答

【証明】

$\tan 10^\circ = x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ &= \tan(30^\circ - 10^\circ)\\ &= \frac{\tan 30^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 30^\circ \tan 10^\circ}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - x}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x}\\ &= \frac{1 - \sqrt{3}x}{\sqrt{3} + x} \quad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 40^\circ &= \tan(30^\circ + 10^\circ)\\ &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 10^\circ}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + x}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x}\\ &= \frac{1 + \sqrt{3}x}{\sqrt{3} - x}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ &= \frac{1 - \sqrt{3}x}{\sqrt{3} + x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}x}{\sqrt{3} - x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 3x^2}{3 - x^2} \quad \cdots\cdots \text{②}\end{aligned}$$

一方，加法定理より，

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ &= \frac{2\tan 10^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ}\\ &= \frac{2x}{1 - x^2} \quad \cdots\cdots \text{③}\end{aligned}$$

であるから，①, ③ が等しいことより，

$$\begin{aligned}\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{1 - \sqrt{3}x}{\sqrt{3} + x} &\iff 2x(\sqrt{3} + x) = (1 - x^2)(1 - \sqrt{3}x)\\ &\iff \sqrt{3}x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{3}x + 1 = 0\\ &\iff \sqrt{3}x(x^2 - 3) = 3x^2 - 1\\ &\iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 3x^2}{3 - x^2} \quad \cdots\cdots \text{④}\end{aligned}$$

②, ④ より，

$$\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ = x \text{ すなわち } \tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$$

であることが示された．　(証明終)

♢ ♡

解説

ポイントは，$\tan 10^\circ = x$ と置いて，$\tan 20^\circ$, $\tan 40^\circ$ を x で表すことです．なお，$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を忘れずに用いましょう．しかし，これだけでは解けないので，2 倍角の公式を用いて $\tan 20^\circ$ を 2 通りで表現します．

n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2)　$X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ．

(3)　$Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ．

(3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値の確率

方針

全事象は n^3 となるので，取り出すカードの場合の数を考えます．全事象は順列で考えているので，取り出すカードの場合の数も順列で考えます．

♣ ♠

解答

(1) 3 回試行を行うとき，取り出すカードのすべての場合は n^3 通りある．このうち，最小値が k 以上で最大値が $j+k$ 以下となるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚の中から重複を許して 3 枚を選べばよいので，$(k+1)^3$ 通りある．ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{\frac{(k+1)^3}{n^3}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(2) 3 枚のカードの組合せを $\{a, b, c\}$ で表すこととするとき，$X=j, Y=j+k$ となるのは，次の 3 通りがある．

(i) $\{j, j, j+k\}$

(ii) $\{j, j+k, j+k\}$

(iii) $\{j, b, j+k\}$ $(j < b < j+k)$

それぞれの取り出す順序を考えると，

(i) のとき　3 通り．

(ii) のとき　3 通り．

(iii) のとき　$3! = 6$ 通り．

があるので，求める確率は，

$$\frac{3+3+6(k-1)}{n^3} = \boldsymbol{\frac{6k}{n^3}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3)　$Y-X=s$ となるのは，

$$(X,Y)=(1,\ s+1),\ (2,\ s+2),\ \cdots\cdots,\ (n-s,\ n)$$

の $n-s$ 通りがある．いずれの確率も (2) で $k=s$ としたものなので，求める確率は，

$$P(s)=\frac{6s}{n^3}\cdot(n-s)=\boldsymbol{\frac{6s(n-s)}{n^3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4)　(3) より，$P(s)$ は s についての 2 次関数となる．

$$\begin{aligned}P(s)&=\frac{6}{n^2}s-\frac{6}{n^3}s^2\\&=-\frac{6}{n^3}(s^2-ns)\\&=-\frac{6}{n^3}\left(s-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{2n}\end{aligned}$$

$y=P(s)$ のグラフは上に凸の放物線であり，n は偶数であることから，$s=\frac{n}{2}$ のとき，$P(s)$ は最大値をとる．ゆえに，$P(s)$ を最大にする s の値は，

$$\boldsymbol{s=\frac{n}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

最大値・最小値を求める確率の問題です．問題は難しく見えますが，内容としては非常に標準的なものです．例えば最小値が j 以上といわれたら，j 以上 n 以下の $n-j+1$ 枚の中から 1 枚を選べばよいですし，最大値が $j+k$ 以下といわれたら，1 以上 $j+k$ 以下の $j+k$ 枚の中から 1 枚を選べばよいのです．(1) はその両方を同時にやっているので，k 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚の中から 1 枚を選びます．(2) では，$X=j,\ Y=j+k$ となっているので，最低 2 枚は 確定していますから，残り 1 枚が j なのか $j+k$ なのか $j,\ j+k$ 以外なのかで場合分けをする必要があります．重複を避けるためにも丁寧に場合分けをする方がミスがないでしょう．(3) では，(2) の結果が使えるかどうかがポイントとなります．また，(4) では n が偶数になっていますが，もしも n の条件がなければ場合分けをしなければいけません．n が奇数のときは $s=\frac{n}{2}$ は整数とならないため $P(s)$ は $s=\frac{n}{2}$ で最大値をとらないからです．n が奇数の場合は，$\frac{n}{2}$ に最も近い整数すなわち $s=\frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2}$ で最大値をとります．

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > \sqrt{2}$ であることを示せ.

(2) $b_n = \log \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく. b_{n+1} を b_n で表せ.

(3) 一般項 a_n を求めよ.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n>\sqrt{2}$ であることを示せ.

(2) $b_n=\log\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ.

(3) 一般項 a_n を求めよ.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

【テーマ】：漸化式と数列の極限

方針

漸化式が解けるときは，解いてから極限値を求めます．(1) は，数学的帰納法で示します．(2) は，与えられた漸化式を用いて b_{n+1} を式変形していきます.

♣ ♠

解答

(1) $a_n>\sqrt{2}$ …… $(*)$ を数学的帰納法により示す.

【証明】

(i) $n=1$ のとき，$a_1=2>\sqrt{2}$ であるから $(*)$ は成立する.

(ii) $n=k$ のとき，$a_k>\sqrt{2}$ …… ① が成立すると仮定する.

与えられた漸化式に $n=k$ を代入した式を用いると，

$$\begin{aligned}a_{k+1}-\sqrt{2}&=\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}-\sqrt{2}\\&=\frac{{a_k}^2+2-2\sqrt{2}a_k}{2a_k}\\&=\frac{(a_k-\sqrt{2})^2}{2a_k}>0\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つことが示された. **(証明終)**

(2) $b_n=\log\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\log\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}\\&=\log\frac{\dfrac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}}{\dfrac{(a_n+\sqrt{2})^2}{2a_n}}\quad(\because\ (1),\ \text{(ii)})\\&=\log\left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2\\&=2\log\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=2b_n\end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n}$……**(答)**

(3)　$b_1=\log\dfrac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}=\log\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ であるから，

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{n-1}\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

一方，(2) より，$b_n=\log\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$ であるから，

$$\log\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\log\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} \iff \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

である．これを a_n について解くと，

$$\boldsymbol{a_n=\frac{\sqrt{2}\left\{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}+(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}\right\}}{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}-(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(4)　$p=2+\sqrt{2},\ q=2-\sqrt{2}$ とおくと，

$$a_n=\frac{\sqrt{2}\left(p^{2^{n-1}}+q^{2^{n-1}}\right)}{p^{2^{n-1}}-q^{2^{n-1}}}=\frac{\sqrt{2}\left\{1+\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2^{n-1}}\right\}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2^{n-1}}}$$

と変形できる．ここで，$0<\dfrac{q}{p}<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{2^{n-1}}=0$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\sqrt{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇　　♡

解説

(1) は，数学的帰納法で証明をするのが一般的ですが，本問は初項が正の実数であり，漸化式からすべての自然数 n に対して $a_n>0$ であることがわかるので，相加平均・相乗平均の関係を用いても示すことができます．

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\geqq 2\sqrt{\frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{a_n}}=\sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{a_n}{2}=\dfrac{1}{a_n}$ すなわち $a_n=\sqrt{2}$ のときに成立することになりますが，このとき，$a_{n+1}=\sqrt{2}$となり，$a_{n+1}=a_n$ すなわち $a_1=\sqrt{2}$ となるので，矛盾が生じます．したがって，等号は不成立です．ゆえに，$a_n>\sqrt{2}$ が示されます．相加平均・相乗平均の関係を用いるときは，この等号成立条件を忘れないようにしましょう．

(2) は，$b_{n+1}=\log\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}$ として，与えられた漸化式を代入して計算します．この計算過程で (1), (ii) で行った式変形をそのまま流用 (k を n に変えるだけ) すれば，計算が短縮できます．

(3) は，(2) を用いて a_n を求めればよいですが，指数部分がややこしいので，採点者がきちんと判別できるように書くよう心がけましょう．

(4) は，基本的な極限値の計算ですが，値が複雑なので文字で置き換えをすれば本質が見えてくるので，すっきり解くことができます．

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0, 0)$, A$(0, 1)$, B$(1, 0)$, C$(t, 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle \mathrm{ACO} = \angle \mathrm{BCD}$ となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0, 0)$, A$(0, 1)$, B$(1, 0)$, C$(t, 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle$ACO $=$ $\angle$BCD となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

△ACD の面積の最大値を求めるためには，△OAC と △BCD の面積がわかればよいので，点 D の座標を設定して，面積を求めます．

♣ ♠

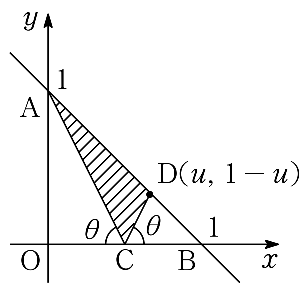
解答

直線 AB の方程式は，$y=-x+1$ であるから，点 D の座標は，

$$\mathrm{D}(u,\ 1-u)\quad (0<u<1)$$

とおける．よって，△OAC, △BCD の面積はそれぞれ，

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}t,\quad \triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(1-t)(1-u)\ \cdots\cdots\ ①$$



と表すことができる．一方，$\angle$ACO $=$ $\angle$BCD $=\theta$ とおくと，

$$\tan\theta=\frac{1}{t}$$

であるから，H$(u, 0)$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CH}}$ である．したがって，

$$\frac{1}{t}=\frac{1-u}{u-t}\quad\Longleftrightarrow\quad u=\frac{2t}{1+t}$$

となる．これを ① へ代入すると，

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(1-t)\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)=\frac{(1-t)^2}{2(1+t)}$$

ゆえに，△ACD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OAC}-\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t-\frac{(1-t)^2}{2(1+t)}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(t-1)^2}{t+1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(t+1)(t-3)+4}{t+1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(-2t+4-\frac{4}{t+1}\right)\\&=-t+2-\frac{2}{t+1}\quad \text{☞ 理系の人はここから微分してもよい．(別解参照)}\\&=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)+3\end{aligned}$$

ここで，$t+1>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$t+1+\frac{2}{t+1}\geqq 2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}=2\sqrt{2}$$

等号は，$t+1=\dfrac{2}{t+1}$ かつ $0<t<1$ すなわち $t=-1+\sqrt{2}$ のとき，成立する．

よって,

$$-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right) \leqq -2\sqrt{2} \iff S \leqq 3-2\sqrt{2}$$

となるので,△ACD の面積の最大値は

$$\boldsymbol{3-2\sqrt{2} \quad (t=\sqrt{2}-1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

である.

解説

点 D の座標を D$(u,\ 1-u)$ とおけば,面積を $t,\ u$ を用いて表すことができます.あとは,$\angle$ACO $=$ $\angle$BCD を用いて t と u の関係式を導けば,面積が t のみで表せます.S は t に関する分数関数となるので,理系の人は微分して最大値を求めることもできます.文系の人は,分数式の最大値なので,有名不等式が使える形に式変形できるよう訓練を積んでおく必要があるでしょう.本問では,$S=-t+2-\dfrac{2}{t+1}$ なので,このまま相加平均・相乗平均の関係を用いることができません.なぜなら相加平均・相乗平均の関係は,$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき,$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つので,加えるもの同士が 0 以上でなければいけないからです.また,仮に 0 以上だったとしても最大値や最小値を求める場合は,加えるもの同士が逆数の関係になければ,右辺で積を計算したときに文字が消えません.そのため解答では,

$$S=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)+3$$

のように変形する必要があるのです.このように,逆数の関係を作ることが式変形のポイントとなります.

別解

S の最大値を微分を用いて求める方法です.(理系用の解答です)

$S=-t+2-\dfrac{2}{t+1}$ より,t で微分すると,

$$S'=-1+\frac{2}{(t+1)^2}$$

$S'=0$ のとき,$\dfrac{2}{(t+1)^2}=1$ すなわち $t=-1\pm\sqrt{2}$ であるから,$0<t<1$ で増減表をかくと,次のようになる.

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで,$t=-1+\sqrt{2}$ のとき,

$$S=-(\sqrt{2}-1)+2-\frac{2}{\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$

となるので,求める S の最大値は

$$\boldsymbol{3-2\sqrt{2} \quad (t=\sqrt{2}-1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

である.

平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

（1） 実数 p, q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$\left|\vec{c}\right| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ．

（2） 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1,\quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$\left|\vec{x}\right|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$\left|\vec{c}\right| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ．

(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1,\quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$\left|\vec{x}\right|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

【テーマ】：内積の計算

方針

(1) は，与えられた条件で p, q の連立方程式を立てます．(2) は，与えられた条件から $\vec{a}, \vec{b}$ を成分表示すると方針が立て易いです．

♣ ♠

解答

(1) $\left|\vec{c}\right| = 1$ より，$\left|\vec{c}\right|^2 = 1$ であるから，

$$\left|p\vec{a} + q\vec{b}\right|^2 = 1 \iff p^2\left|\vec{a}\right|^2 + 2pq\vec{a}\cdot\vec{b} + q^2\left|\vec{b}\right|^2 = 1$$

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$ であるから，

$$p^2 - pq + q^2 = 1 \cdots\cdots ①$$

一方，$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ より，

$$\vec{a}\cdot\left(p\vec{a} + q\vec{b}\right) = 0 \iff p - \frac{1}{2}q = 0 \cdots\cdots ②$$

①, ② より，

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q = \frac{2}{\sqrt{3}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(2) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$ であるから，

$$\vec{a} = (1, 0),\quad \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおくことができる．$\vec{x} = (X, Y)$ とおくと，

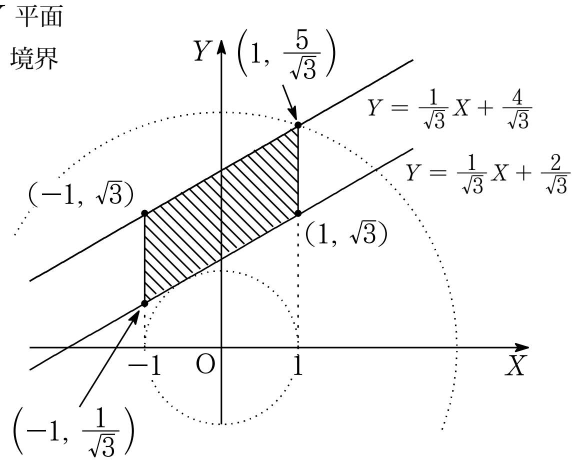
$$\vec{a}\cdot\vec{x} = X,\quad \vec{b}\cdot\vec{x} = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

となるので，

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1 \iff -1 \leqq X \leqq 1$$

$$1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2 \iff 1 \leqq -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \leqq 2$$

ゆえに，この 2 つの不等式を満たす点 (X, Y) を XY 平面に図示すると，右図の斜線部分のようになる．ただし，境界線上の点を含む．



ここで，$\left|\overrightarrow{x}\right| = r$ とすると，$\left|\overrightarrow{x}\right|^2 = r^2$ であるから，

$$X^2 + Y^2 = r^2 \cdots\cdots ③$$

となるので，これは原点を中心とした半径 r の円を表している．この r のとり得る値の範囲を求めればよい．点 $(0, 0)$ と直線 $Y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}X + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の距離が r の最小値であるから，そのときの r の値は，

$$r = \frac{\left|\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}} = 1$$

である．また，③ が点 $\left(1,\ \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$ を通るとき，r は最大となるので，そのときの r の値は，

$$r = \sqrt{1+\frac{25}{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

である．ゆえに，r のとり得る値の範囲は，$1 \leqq r \leqq \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ となるので，$\left|\overrightarrow{x}\right|$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{1 \leqq \left|\overrightarrow{x}\right| \leqq \frac{2\sqrt{21}}{3}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた条件式から p, q の方程式を導いて連立方程式を解けばよいので，方針は立てやすいでしょう．

(2) は，どのような方針を立てればよいかで悩むかもしれませんが，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ に関する条件が与えられているので，これを用いて $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の成分が決定できれば，領域図示の問題に持ち込めます．ポイントは，$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = 1$ という条件から半径 1 の円を考えて，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{2}$ という条件から $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることに気付くことです．そうすれば成分表示ができるので，$\overrightarrow{x}$ も成分表示をして解答のように領域の問題にすればよいのです．

$a>1$ とし，2 つの曲線

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} & (x \geqq 0), \\ y=\dfrac{a^3}{x} & (x>0) \end{cases}$$

を順に C_1, C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする．以下の問いに答えよ．

（1） 曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

（2） 点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

$a>1$ とし，2 つの曲線

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} & (x \geqq 0), \\ y=\dfrac{a^3}{x} & (x>0) \end{cases}$$

を順に C_1, C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする．以下の問いに答えよ．

(1)　曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(2)　点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

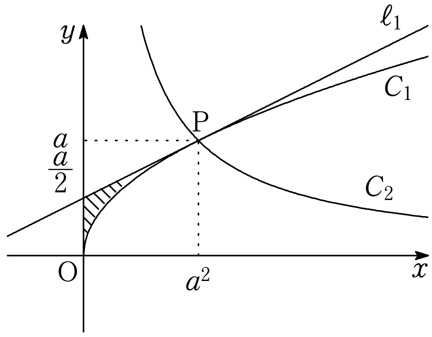
【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，y 軸方向に積分すると計算が楽になります．(2) は，接線の傾きを求めて tan の加法定理を利用します．

♣　♠

解答



(1)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は，

$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x}$$

両辺を 2 乗して，

$$x=\frac{a^6}{x^2} \iff x^3=a^6$$

$$(x-a^2)(x^2+a^2x+a^4)=0$$

x は実数なので，$x=a^2$ である．よって，$\mathrm{P}(a^2,\ a)$ となる．
$y=\sqrt{x}$ に対して，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，直線 ℓ_1 の方程式は，

$$y=\frac{1}{2a}(x-a^2)+a \iff y=\frac{1}{2a}x+\frac{a}{2}$$

となる．したがって，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x\,dy-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot a^2 \\ &= \int_0^a y^2\,dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2 \\ &= \left[\ \frac{1}{3}y^3\ \right]_0^a-\frac{1}{4}a^3 \\ &= \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}a^3}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2)　$y=\dfrac{a^3}{x}$ に対して，$y'=-\dfrac{a^3}{x^2}$ であるから，C_2 の点 P における接線 ℓ_2 の方程式は，

$$y=-\frac{a^3}{a^4}(x-a^2)+a \iff y=-\frac{1}{a}x+2a$$

ℓ_1, ℓ_2 と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α, β とすると，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2a}$, $\tan\beta=-\dfrac{1}{a}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\tan\theta(a) &= \left|\tan(\alpha-\beta)\right| \\
&= \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| \\
&= \left|\frac{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{2a}\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{\dfrac{3}{2a}}{1-\dfrac{1}{2a^2}}\right| \\
&= \frac{3a}{2a^2-1} \quad (\because \ \ a>1)
\end{aligned}
$$

ここで，$a \to \infty$ のとき，$\tan\theta(a) \to 0$ であり，$\theta(a) \to 0$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) &= \lim_{a\to\infty} a\tan\theta(a)\cdot\cos\theta(a) \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{3a^2}{2a^2-1}\cdot\cos\theta(a) \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{3}{2-\dfrac{1}{a^2}}\cdot\cos\theta(a) \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

(1) は，グラフをかいて面積を考えると x 軸方向に積分するよりも y 軸方向に積分する方が計算が楽になることが分かります．

(2) は，2 直線のなす角なので，接線の傾きを求めて tan の加法定理を利用します．ただし，$0 < \theta(a) < \dfrac{\pi}{2}$ なので，$\tan\theta(a) > 0$ となります．安易に $\tan\theta(a) = \tan(\alpha-\beta)$ としないようにする必要があります．これは，α，β の値によって，$\tan\theta(a)$ の符号が変わる可能性があるからです．ここで，$\tan\theta = -\tan(\pi-\theta)$ が成り立つことから，なす角を考えるときは，$\left|\tan(\alpha-\beta)\right|$ とすると確実になす角が鋭角になります．

A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする．毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする．どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする．1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である．また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の $\frac{1}{3}$ 倍である．このとき，次の各問いに答えよ．

（1） 1 回目の試合で A チームが勝つ確率 P_{A} と B チームが勝つ確率 P_{B} を求めよ．

（2） 前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ．

（3） 4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ．

（4） 5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このとき A チームが優勝している確率を求めよ．

A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする．毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする．どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする．1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である．また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の $\dfrac{1}{3}$ 倍である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　1 回目の試合で A チームが勝つ確率 P_{A} と B チームが勝つ確率 P_{B} を求めよ．

(2)　前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ．

(3)　4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ．

(4)　5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このとき A チームが優勝している確率を求めよ．

【テーマ】：条件つき確率

方針

前日の試合結果で翌日に勝つ確率が変化するので，反復試行の確率は使えません．考えられる場合は 4 通りであることに気付くことがポイントです．

♣ ♠

解答

(1)　$P_{\mathrm{A}} = 2P_{\mathrm{B}}$ かつ $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 1$ であるから，

$$\boldsymbol{P_{\mathrm{A}} = \frac{2}{3},\ P_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(2)　$P_{\mathrm{AA}} = 2P_{\mathrm{AB}}$ かつ $P_{\mathrm{AA}} + P_{\mathrm{AB}} = 1$ であるから，

$$\boldsymbol{P_{\mathrm{AA}} = \frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．また，$P_{\mathrm{BA}} = \dfrac{1}{3}P_{\mathrm{BB}}$ かつ $P_{\mathrm{BA}} + P_{\mathrm{BB}} = 1$ であるから，

$$\boldsymbol{P_{\mathrm{BB}} = \frac{3}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　3 回で優勝が決まるのは，A が 3 連勝するかまたは B が 3 連勝するときなので，その確率 P_3 は，

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} \\ &= \frac{209}{432} \end{aligned}$$

4 回で優勝が決まるのは，

(i)　BAAA

(ii)　ABBB

のいずれかである．(2) より，$P_{\mathrm{BA}} = \dfrac{1}{4}$, $P_{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{3}$ である．

よって，4 回の試合で優勝が決まる確率 P_4 は，

$$P_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{35}{216}$$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{209}{432}+\frac{35}{216}=\boldsymbol{\frac{31}{48}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　5 回目の試合で優勝が決まる確率を考える．

(i)　ABAAA となる確率を P_{ABAAA} とすると，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{ABAAA}}&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{2}{81}\end{aligned}$$

(ii)　BBAAA となる確率を P_{BBAAA} とすると，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{BBAAA}}&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{36}\end{aligned}$$

(iii)　BABBB となる確率を P_{BABBB} とすると，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{BABBB}}&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{1}{64}\end{aligned}$$

(iv)　AABBB となる確率を P_{AABBB} とすると，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{AABBB}}&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

ゆえに，求める条件つき確率 P は，

$$\begin{aligned}P&=\frac{P_{\mathrm{ABAAA}}+P_{\mathrm{BBAAA}}}{P_{\mathrm{ABAAA}}+P_{\mathrm{BBAAA}}+P_{\mathrm{BABBB}}+P_{\mathrm{AABBB}}}\\&=\frac{\frac{2}{81}+\frac{1}{36}}{\frac{2}{81}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{12}}\\&=\boldsymbol{\frac{272}{785}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇　♡

解説

前日 A が勝つときと，前日 B が勝つときで場合を分ければ，次の 4 つの確率を考えればよいことが分かります．

$P_{\mathrm{AA}}=\frac{2}{3}$　…　前日 A が勝って，翌日も A が勝つ．

$P_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$　…　前日 A が勝って，翌日は B が勝つ．

$P_{\mathrm{BA}}=\frac{1}{4}$　…　前日 B が勝って，翌日は A が勝つ．

$P_{\mathrm{BB}}=\frac{3}{4}$　…　前日 B が勝って，翌日も B が勝つ．

これらの確率は，(2) ですべて求められるので，(3) 以降は，それを組合せるだけとなります．

曲線 $C : y = \dfrac{\log x}{x}$ について，次の問いに答えよ．

（1） 曲線 C の概形をかけ．

（2） C の変曲点 P における，C の接線 ℓ の方程式を求めよ．

（3） ℓ と C は，P 以外に共有点をもたないことを示せ．

曲線 $C: y=\dfrac{\log x}{x}$ について，次の問いに答えよ．

（1） 曲線 C の概形をかけ．

（2） C の変曲点 P における，C の接線 ℓ の方程式を求めよ．

（3） ℓ と C は，P 以外に共有点をもたないことを示せ．

【テーマ】：曲線の凹凸とグラフ

方針

曲線 C の概形をかくので，第 2 次導関数まで計算をして増減表をかきます．(3) では，方程式を作り実数解が一つしかないことを証明しましょう．

♣ ♠

解答

（1） $y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ であり，

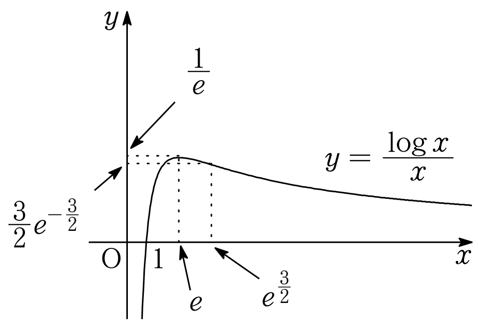
$$y''=\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

よって，$y'=0$ のとき，$x=e$，$y''=0$ のとき，$x=e^{\frac{3}{2}}$ である．また，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$$

であるから，増減表とグラフは，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$		$-$	0	$+$	
y	$(-\infty)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	(0)



（2） $\mathrm{P}\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ より，直線 ℓ の方程式は，

$$y=\frac{1-\log e^{\frac{3}{2}}}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2}\left(x-e^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1-\dfrac{3}{2}}{e^3}\left(x-e^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}$$

である．

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\text{(答)}$$

（3） **【証明】**

$\dfrac{\log x}{x}=-\dfrac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}$ が $x=e^{\frac{3}{2}}$ 以外の実数解をもたないことを示せばよい．

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}-\left(-\dfrac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}+\frac{1}{2}e^{-3}=\frac{1}{x^2}\left(1-\log x+\frac{1}{2}e^{-3}x^2\right)\ \cdots\cdots\ ①$$

$g(x)=1-\log x+\dfrac{1}{2}e^{-3}x^2$ とおくと，

$$g'(x)=-\frac{1}{x}+e^{-3}x=\frac{e^{-3}x^2-1}{x}$$

であり，$g'(x)=0$ のとき，$x=e^{\frac{3}{2}}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，$x>0$ において，$g(x)\geqq 0$ となるので，① より，$f'(x)\geqq 0$ であり，等号が成立するのは，$x=e^{\frac{3}{2}}$ のときのみである．よって，$f(x)$ は単調増加で $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=0$ より，$f(x)=0$ の実数解は $x=e^{\frac{3}{2}}$ のみであることがわかるので，曲線 C と直線 ℓ は P 以外に共有点をもたないことが示された．　**（証明終）**

◇　♡

解説

(1), (2) は，基本問題なので完答しましょう．解答では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ としていますが，これは，はさみうちの原理を用いて証明することができるので，一度は必ず自力で証明をしておきましょう．解答中に必要だと思えばその証明もつけておくと完璧です．ちなみに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}$ は不定形ではないので，そのまま計算できます．

$$\frac{\log x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\log x$$

と分ければ，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$\log x\to-\infty$ となるので，その積は $-\infty$ となります．

(3) は，C と ℓ が P 以外に共有点をもたないので，方程式を作り実数解がただ 1 つであることを示します．計算のポイントは，解答中にある $g(x)$ を新たに考えることです．$f'(x)$ の符号が確定すれば単調性がわかるので，題意は示せます．$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}+\dfrac{1}{2}e^{-3}$ をもう一度微分すると計算が大変なので，$\dfrac{1}{x^2}$ でくくり，確実に正となる部分は排除して残りの符号を考えるという方法を取っています．こうすることで分数の微分をしなくてよくなり計算もスッキリします．

整数 $p,\ q\ (q>0)$ に対して，x の方程式 $x^2-px-q=0$ は有理数の解をもっている．このとき x の方程式 $x^2-pqx-(q^3+1)=0$ は有理数の解をもたないことを証明せよ．

整数 $p, q\ (q>0)$ に対して，x の方程式 $x^2-px-q=0$ は有理数の解をもっている．このとき x の方程式 $x^2-pqx-(q^3+1)=0$ は有理数の解をもたないことを証明せよ．

【テーマ】：実数解を持つ条件

方針

方程式が有理数解を持つときは，判別式の値が平方数になります．

♣ ♠

解答

【証明】

$x^2-px-q=0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=p^2+4q>0$$

であり，有理数解を持つことから，D_1 は平方数となる．よって，自然数 n を用いて，

$$p^2+4q=n^2$$

と表せる．次に，$x^2-pqx-(q^3+1)=0$ の判別式を D_2 とすると，

$$\begin{aligned}D_2&=p^2q^2+4(q^3+1)\\&=q^2(p^2+4q)+4\\&=q^2n^2+4\end{aligned}$$

ここで，$x^2-pqx-(q^3+1)=0$ が有理数解を持つと仮定すると，
D_2 は平方数となるので，自然数 m を用いて，

$$q^2n^2+4=m^2$$

と表せる．この式を変形すると，

$$m^2-q^2n^2=4 \iff (m+qn)(m-qn)=4$$

$m+qn,\ m-qn$ は整数で，$m+qn>m-qn$ より，

$$(m+qn,\ m-qn)=(4,\ 1)$$

となる．これより，$m=\dfrac{5}{2}$ となるので，m が自然数であることに矛盾する．

ゆえに，$x^2-pqx-(q^3+1)=0$ は，有理数の解を持たないことが示された． **（証明終）**

♢ ♡

解説

背理法を用いて証明しています．有理数を持つために最低限必要な条件すなわち必要条件をまず求めています．それが，判別式が平方数となることです．その最低限の条件を元に議論を進めていくと，最終的に矛盾が生じるので有理数解は存在しないという結論になります．

(1)　$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ.

(2)　関数 $f(x)=xe^{-x}$ を k 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような x の値を a_k とする. a_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ である.

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ.

(4)　$y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ.

(1)　$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $f(x)=xe^{-x}$ を k 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような x の値を a_k とする．a_k を求めよ．ただし，$k=1,\,2,\,\cdots\cdots$ である．

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ．

(4)　$y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と極限

方針

(1) では，$h>0$ として，$a=1+h$ とおき，二項定理を活用します．

♣　♠

解答

(1)　【証明】　$a>1$ のとき，$h>0$ として，$a=1+h$ とおくと，

$$a^n=(1+h)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots\cdots+h^n>{}_n\mathrm{C}_2h^2$$

したがって，

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{{}_n\mathrm{C}_2h^2}=\frac{2n}{n(n-1)h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

が成り立つ．ゆえに，示された．　(証明終)

(2)　$f(x)=xe^{-x}$ より，

$$f'(x)=-(x-1)e^{-x},\quad f''(x)=(x-2)e^{-x}$$

となるので，$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ と推定できる．

$k=1$ のときは，成り立つので，ある k での成立を仮定して，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^ke^{-x}+(-1)^{k+1}(x-k)e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}(x-k-1)e^{-x}\end{aligned}$$

より，$k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法によりすべての自然数 k に対して，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$$

が成り立つ．$f^{(k)}(x)=0$ を満たす x の値は，$e^{-x}\fallingdotseq 0$ であることから，$x=k$ である．

$\therefore$　$\boldsymbol{a_k=k}$……(答)

(3)
$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x te^{-t}\,dt\\&=\Big[-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^x\\&=-(x+1)e^{-x}+1\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

(2) より，$S(a_k)=S(k)=-(k+1)e^{-k}+1$ であるから，

$$n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)=n+\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}-n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$ とおくと,

$$T_n=2e^{-1}+3e^{-2}+\cdots\cdots+(n+1)e^{-n}$$

$$e^{-1}T_n=\qquad 2e^{-2}+\cdots\cdots+ne^{-n}+(n+1)e^{-n-1}$$

辺々引くと,

$$(1-e^{-1})T_n=2e^{-1}+e^{-2}+\cdots\cdots+e^{-n}-(n+1)e^{-n-1}$$

$$\frac{e-1}{e}T_n=\frac{1}{e}+\frac{\frac{1}{e}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{e}}-\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$T_n=\frac{1}{e-1}+\frac{e\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{(e-1)^2}-\frac{e}{e-1}\cdot\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

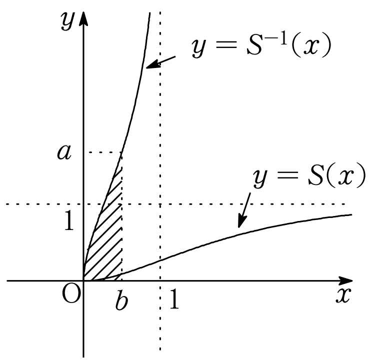
したがって,

$$(与式)=\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\frac{1}{e-1}+\frac{e}{(e-1)^2}\quad(\because\ (1))$$
$$=\mathbf{\frac{2e-1}{(e-1)^2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) ① より,

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}+1\right)=1$$

よって,$y=S(x)$ と $y=S^{-1}(x)$ のグラフは右図のようになる.



$S^{-1}(b)=a$ とすると,$b=S(a)=1-\frac{a+1}{e^a}$ であり,

$b\to1-0$ のとき,$a\to\infty$ である.よって,

$$\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy=\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(x)\,dx$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left\{ab-\int_0^a S(x)\,dx\right\}$$

$$\int_0^a S(x)\,dx=\int_0^a\{1-(x+1)e^{-x}\}\,dx$$
$$=\Big[x+(x+1)e^{-x}\Big]_0^a-\int_0^a e^{-x}\,dx$$
$$=a+(a+1)e^{-a}-1+e^{-a}-1$$
$$=(a+2)e^{-a}+a-2$$

$$(与式)=\lim_{b\to1-0}\{ab-(a+2)e^{-a}-(a-2)\}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(2-\frac{a+2}{e^a}\right)$$
$$=\mathbf{2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) の証明は,経験がないと難しく感じると思います.$a=1+h$ と分けて二項定理を使うことがポイントです.

(2) は,$f^{(k)}(x)$ が類推できるので,数学的帰納法で証明をすれば求められます.

(3) は,等差×等比の和タイプなので,公比倍して引きます.

(4) は,逆関数の積分なので,面積を利用して計算すれば求められます.

定数 k に対して，方程式

$$(\log_2 x)^2-(k+2)\log_2 x-k+17=0$$

を考える．

（1） 方程式が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき，$\log_2(\alpha\beta)$ と $(\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)$ を k を用いて表せ．

（2） 方程式が 4 より大きい異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

定数 k に対して，方程式

$$(\log_2 x)^2-(k+2)\log_2 x-k+17=0$$

を考える．

(1)　方程式が実数解 α, β をもつとき，$\log_2(\alpha\beta)$ と $(\log_2\alpha)(\log_2\beta)$ を k を用いて表せ．

(2)　方程式が 4 より大きい異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：対数方程式

方針

(1) は，解と係数の関係を用います．(2) は，(1) の結果を使っても解けますし，使わなくても解けます．

♣　♠

解答

(1)　真数条件より，$x>0$ である．

$\log_2 x=t$ とおくと，与式は

$$t^2-(k+2)t-k+17=0 \cdots\cdots ①$$

となり，この方程式の 2 解は $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$ であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\log_2\alpha+\log_2\beta=k+2\\(\log_2\alpha)(\log_2\beta)=-k+17\end{cases}$$

したがって，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\log_2\alpha\beta=k+2}\\\boldsymbol{(\log_2\alpha)(\log_2\beta)=-k+17}\end{cases}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$x>4$ より，$\log_2 x>\log_2 4$ であるから，$t>2$ である．与えられた方程式が 4 より大きい異なる 2 つの実数解をもつためには，t についての方程式 ① が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもてばよい．すなわち，① の判別式を D とするとき，

$$D>0 \text{ かつ } \log_2\alpha>2\,,\quad \log_2\beta>2$$

が成り立てばよい．

$$D=(k+2)^2-4(-k+17)>0 \iff k^2+8k-64>0$$

$$\therefore\quad k<-4-4\sqrt{5}\,,\quad -4+4\sqrt{5}<k \cdots\cdots ②$$

また，$\log_2\alpha+\log_2\beta>4$ より，(1) から，

$$\log_2\alpha+\log_2\beta=k+2>4 \iff k>2 \cdots\cdots ③$$

さらに，$\log_2\alpha-2>0$，$\log_2\beta-2>0$ より，

$$(\log_2\alpha-2)(\log_2\beta-2)>0$$

であるから，

$$(\log_2\alpha)(\log_2\beta)-2(\log_2\alpha\beta)+4>0 \iff -k+17-2(k+2)+4>0$$

$\therefore\ \ k<\dfrac{17}{3}$ …… ④

ゆえに，②〜④ より，求める k の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-4+4\sqrt{5}<k<\frac{17}{3}}\text{……(答)}$$

◇ ♡

[解説]

(1) は，与えられた方程式の形から $\log_2 x=t$ とおき，t に関する 2 次方程式を作る基本問題です．方程式の 2 解が α,β と与えられているので，t に関する 2 次方程式 ① の 2 解は，$\log_2\alpha, \log_2\beta$ となります．

(2) は，(1) の結果を使う解答にしました．注意しなければならないのは，

$$\log_2\alpha>2, \log_2\beta>2 \iff \log_2\alpha+\log_2\beta>4\ ,\ \ \log_2\alpha\log_2\beta>4$$

としてはいけない点です．なぜなら，これらは同値ではないからです． $\Longrightarrow$ は成り立ちますが，逆は成り立ちません．反例としては，$\log_2\alpha=1$，$\log_2\beta=5$ などが挙げられます．必要十分条件にするためには，

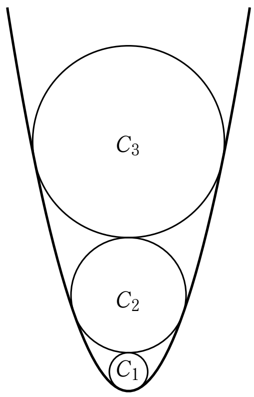
$$\log_2\alpha>2, \log_2\beta>2 \iff \log_2\alpha+\log_2\beta>4\ ,\ \ (\log_2\alpha-2)(\log_2\beta-2)>0$$

としなければいけませんので，注意しましょう．なお，別解としては，$f(t)=t^2-(k+2)t-k+17$ とおき，$y=f(t)$ のグラフが t 軸と $t>2$ で異なる 2 点を共有すればよいので，$f(t)=0$ の判別式を D とすれば，

$$\begin{cases}\text{(i)}\ \ D>0\\ \text{(ii)}\ \ \text{軸}>2\\ \text{(iii)}\ \ f(2)>0\end{cases}$$

が成り立てばよいことになります．これを解くと ②〜④ の不等式が得られます．

座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする．D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする．自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする．C_n の半径を a_n とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．



（1） a_1 を求めよ．

（2） $n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ．

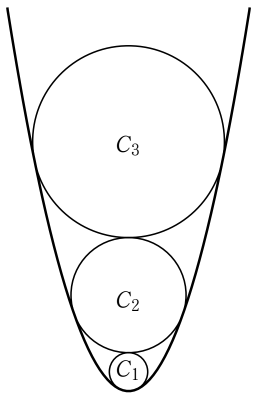
（3） a_n を n の式で表せ．

座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする．D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする．自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする．C_n の半径を a_n とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．

（1） a_1 を求めよ．

（2） $n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ．

（3） a_n を n の式で表せ．



【テーマ】：図形と漸化式

方針

(1) は，円が領域 $y \geqq x^2$ の内部にある条件を考えます．(2) は，接する条件を判別式から導きます．

♣ ♠

解答

（1） y 軸の正の部分に中心をもち原点を通る円の半径を r とすると，その方程式は，

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

であり，この円が領域 $y \geqq x^2$ の内部にあるためには

$$y + (y - r)^2 \geqq r^2 \iff y\{y - (2r - 1)\} \geqq 0$$

が円上の任意の y $(y \geqq 0)$ に対して成り立てばよい．そのための r の範囲は，

$$2r - 1 \leqq 0 \text{ より，} 0 < r \leqq \frac{1}{2}$$

であるから，円 C_1 の半径 a_1 の値は，$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}$……(答)

（2） $n \geqq 2$ C_n $(0,\ a_n + 2b_{n-1})$ C_n

$$x^2 + (y - a_n - 2b_{n-1})^2 = {a_n}^2$$

C_n $y = x^2$ y 2

$$y + (y - a_n - 2b_{n-1})^2 = {a_n}^2$$

$$y^2 - (2a_n + 4b_{n-1} - 1)y + (a_n + 2b_{n-1})^2 - {a_n}^2 = 0$$

D

$$\begin{aligned} D &= (2a_n + 4b_{n-1} - 1)^2 - 4\{(a_n + 2b_{n-1})^2 - {a_n}^2\} \\ &= 4{a_n}^2 - 4a_n + 1 - 8b_{n-1} \\ &= (2a_n - 1)^2 - 8b_{n-1} \end{aligned}$$

$D = 0$

$$(2a_n - 1)^2 = 8b_{n-1}$$

$n \geqq 2$

$2a_n - 1 > 2a_1 - 1 = 0$　　$b_{n-1} > 0$

$2a_n - 1 = 2\sqrt{2b_{n-1}}$

$\therefore\ \boldsymbol{a_n = \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}\ \ (n \geqq 2)}$……(答)

(3)　$n \geqq 2$　　$a_n = b_n - b_{n-1}$　　(2)

$b_n - b_{n-1} = \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}$

$b_n = b_{n-1} + \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2} = \left(\sqrt{b_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{b_n} = \sqrt{b_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$　$(n \geqq 2)$

$\{\sqrt{b_n}\}$　　$\sqrt{b_1} = \sqrt{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,　　$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} + (n-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{b_n} = \frac{n}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ b_n = \frac{n^2}{2}$

$n \geqq 2$

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_n - b_{n-1} \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1)^2}{2} \\
&= n - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$n = 1$

$\boldsymbol{a_n = n - \frac{1}{2}}$……(答)

◇　　♡

解説

C_n　　y

x　　y　　2　　(2)

$b_{n-1} > 0$

(3)　$b_n = a_n - a_{n-1}$　　$\{b_n\}$

$c_n = \sqrt{b_n}$　　$\{c_n\}$

$w = u + vi$ (u, v i) u $\mathrm{Re}(w)$, v $\mathrm{Im}(w)$

(1) $z = x + yi$ (x, y) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ x, y

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqq 1$ $\dfrac{1}{4} \leqq \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqq \dfrac{1}{2}$ z

(3) z (2) z $|z|$

z

$w = u + vi$ $(u, v$ i $)$ u $\mathrm{Re}(w)$, v $\mathrm{Im}(w)$

(1) $z = x + yi$ $(x, y$ $)$ $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ x, y

(2) $\frac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq 1$ $\frac{1}{4} \leqq \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq \frac{1}{2}$ z

(3) z (2) z $|z|$

z

【テーマ】：複素数平面

方針

xy

♣ ♠

解答

(1) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$

$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \boldsymbol{\frac{x}{x^2+y^2}}$ ……(答)

$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \boldsymbol{-\frac{y}{x^2+y^2}}$ ……(答)

(2) (1)

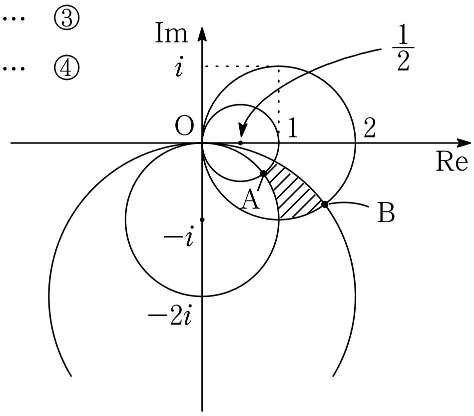
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{x^2+y^2} \leqq 1 \iff x^2+y^2 \leqq 2x \leqq 2(x^2+y^2)$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqq 1 & \cdots\cdots \text{①} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqq \frac{1}{4} & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} \leqq -\frac{y}{x^2+y^2} \leqq \frac{1}{2} \iff x^2+y^2 \leqq -4y \leqq 2(x^2+y^2)$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(y+2)^2 \leqq 4 & \cdots\cdots \text{③} \\ x^2+(y+1)^2 \geqq 1 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

① ④ z



(3) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $x^2+y^2=r^2$

r (2) A

$x^2+y^2=r^2$ r B r

A $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$, $x^2+(y+1)^2=1$

$\mathrm{A}\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

B $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+(y+2)^2=4$

$\mathrm{B}\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$|z|$

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \quad \left(\boldsymbol{z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}i}\right) \\ \textbf{最小値}\quad \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \quad \left(\boldsymbol{z = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

xy $z = x + yi$

$x,\ y$ xy

(3) $|z|$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $x^2 + y^2 = r^2$

r (2) r

r r (2)

(1) a, b $a < b$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < 1$ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ $\dfrac{5}{6}$

(2) a, b, c $a < b < c$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < 1$ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
$\dfrac{41}{42}$

(1)　a, b　$a < b$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < 1$　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$　$\dfrac{5}{6}$

(2)　a, b, c　$a < b < c$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < 1$　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
$\dfrac{41}{42}$

【テーマ】：整数問題

方針

a, b

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

(i)　$a = 1$

(ii)　$a = 2$　$a < b$　$b \geqq 3$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(iii)　$a \geqq 3$　$a < b$　$b \geqq 4$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} < \frac{5}{6}$$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$　$\dfrac{5}{6}$

(2)　**【証明】**

(i)　$a = 1$　$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < 0$

(ii)　$a = 2$　$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{2}$　$b \geqq 3$

(ア)　$b = 3$

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\qquad c > 6$$

よって，$c \geqq 7$ となる．このとき，

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{41}{42}$ である．

(イ)　$b \geqq 4$ のとき，$c \geqq 5$ であるから，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{41}{42}$ である．

(iii)　$a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$, $c \geqq 5$ であるから，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < \frac{41}{42}$$

ゆえに，(i)〜(iii) より，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{41}{42}$ であることが示された．　**(証明終)**

◇ ♡

解説

条件が不等式で与えられていることと，自然数であることを利用します．a, b の値が大きくなりすぎると $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の値は小さくなるので，a, b の値はそれほど大きくないということに気付くことがポイントです．証明をする前に，$a=1, 2, 3\cdots$ 等としてみて目星をつけるとよいでしょう．ただし，すべての自然数を調べることはできませんから，a がある値以上であれば，最大となることはないということを述べておく必要があります．(1) では $a \geqq 3$ のときは，最大でも $\dfrac{7}{12}$ にしかならないので，$a=2$ で調べていた値が最大であると言えるわけです．(2) でも同様にしますが文字が 3 つあるので丁寧に調べましょう．

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする．また，辺 OC 上に点 E をとり，CE $= t$ とする．

（1） AD の長さを求めよ．

（2） $\cos\angle$DAE を t を用いて表せ．

（3） $\triangle$ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ．

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする．また，辺 OC 上に点 E をとり，CE ＝ t とする．

（1） AD の長さを求めよ．

（2） $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ．

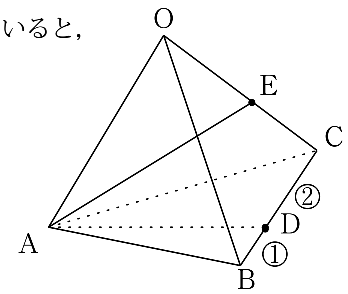
（3） △ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ．

【テーマ】：空間図形の計量

方針

空間図形といっても一つ一つの問題は平面図形の問題と考えることができます．余弦定理を利用して計算を進めていきます．

解答



（1） $\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BD}=1,\ \angle\mathrm{ABD}=60^\circ$ より，△ABD において余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos\angle\mathrm{ABD}\\&=9+1-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$

$\mathrm{AD}>0$ より，$\mathrm{AD}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$……(答)

（2） （1）と同様に考えると，△ACE において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AE}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{EC}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{EC}\cdot\cos\angle\mathrm{ACE}\\&=9+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\frac{1}{2}\\&=t^2-3t+9\end{aligned}$$

$\mathrm{AE}>0$ より，$\mathrm{AE}=\sqrt{t^2-3t+9}$ である．さらに，△EDC において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{ED}^2&=\mathrm{DC}^2+\mathrm{EC}^2-2\mathrm{DC}\cdot\mathrm{EC}\cdot\cos\angle\mathrm{ECD}\\&=4+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\frac{1}{2}\\&=t^2-2t+4\end{aligned}$$

$\mathrm{ED}>0$ より，$\mathrm{ED}=\sqrt{t^2-2t+4}$ である．ゆえに，△AED において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAE}&=\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{ED}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AD}}\\&=\frac{t^2-3t+9+7-(t^2-2t+4)}{2\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\sqrt{7}}\\&=\boldsymbol{\frac{-t+12}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

（3） （2）から，

$$\begin{aligned}\sin^2\angle\mathrm{DAE}=1-\cos^2\angle\mathrm{DAE}&=1-\frac{(-t+12)^2}{28(t^2-3t+9)}\\&=\frac{27t^2-60t+108}{28(t^2-3t+9)}\end{aligned}$$

$\sin\angle\mathrm{DAE} > 0$ より，$\sin\angle\mathrm{DAE} = \dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADE} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin\angle\mathrm{DAE}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{27\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{3}}\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 3$ であるから，$\triangle\mathrm{ADE}$ は $t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{224}{3}} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる．ゆえに，$\triangle\mathrm{ADE}$ は

$t = \dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{42}}{3}$……(答)

をとる．

◇ ♡

解説

四面体から三角形を取り出し，余弦定理で辺の長さや角の三角比を求めます．$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積は $\dfrac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}$ となりますが，根号内が最小値をとるときが面積が最小になるときであることはすぐにわかるので，2 次関数の最小値を求める問題になります．もしもこれが分数式になったときは，相加平均・相乗平均の関係を用いたり，分母にだけ変数 t が存在するように式変形をしたりと工夫が必要になりますが，理系の人は数学 Ⅲ の微分法を用いて最大値・最小値を求めることもできます．問題文中には書かれていませんが，t のとり得る値の範囲を書くのを忘れないようにしましょう．これがなくても答えとしては正しいものが出てきますが，t の範囲がないために減点されてしまいます．

$-1 < x < 1$ で定義される関数 $f(x) = 2x + \sqrt{5 - 5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A, B の座標をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた点 A, B について，線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

$-1<x<1$ で定義される関数 $f(x)=2x+\sqrt{5-5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C:y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2)　曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A, B の座標をそれぞれ求めよ．

(3)　(2) で求めた点 A, B について，線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は凹凸を調べるので $f''(x)$ の符号を考えます．(2) は，原点からの距離を t の式で表して最大値を最小値を求めますが，対称性に着目すれば計算量が減らせます．(3) は，積分計算をするまでもなく面積公式だけで求められます．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$f'(x)=2+\dfrac{-10x}{2\sqrt{5-5x^2}}=2-\dfrac{\sqrt{5}x}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから，

$$\begin{aligned}
f''(x)&=-\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\\
&=-\sqrt{5}\cdot\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\\
&=\frac{-\sqrt{5}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}<0\quad(\because\ \ -1<x<1)
\end{aligned}$$

よって，$f''(x)<0$ であるから，曲線 C は上に凸であることが示された．　**(証明終)**

またこのとき，$f'(x)$ は単調減少であり，$f'(x)=0$ のとき，

$$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{1-x^2}}=2\quad\Longleftrightarrow\quad 5x^2=4(1-x^2)\ \text{かつ}\ x>0$$

ゆえに，$x=\dfrac{2}{3}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}+\sqrt{5-\dfrac{20}{9}}=3$ であるから，

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，最大値は **3**……**(答)**

(2)　C 上の点を $(t,\,2t+\sqrt{5-5t^2})$ とおき，原点 O との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d^2 &= t^2+(2t+\sqrt{5-5t^2})^2 \\ &= 4t\sqrt{5-5t^2}+5 \\ &= 4\sqrt{5}\,t\sqrt{1-t^2}+5 \end{aligned}$$

ここで，$g(t)=t\sqrt{1-t^2}$ とおくと，$g(-t)=-g(t)$ であるから，$y=g(t)$ のグラフは原点に関して対称である．よって，$0 \leqq t < 1$ で考える．

$$g(t)=\sqrt{t^2-t^4}=\sqrt{-\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

より，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値をとる．また，原点に関する対称性により，$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値をとる．

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{5-\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{5-\frac{5}{2}}=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

であるから，点 A, B の座標は，

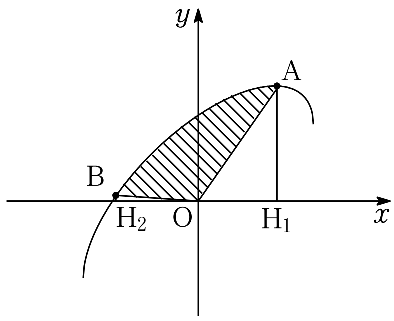
$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}}\right),\ \mathbf{B}\left(\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

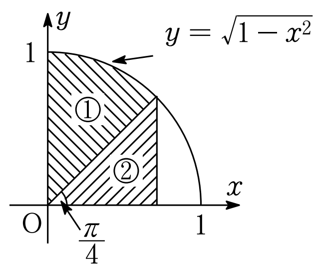
(3)　グラフは，右図のようになる．$\mathrm{H_1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right)$，$\mathrm{H_2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right)$ とおく．求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x+\sqrt{5-5x^2}\right)dx \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}}_{\triangle\mathrm{OBH_2}\text{の面積}}\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{2}}_{\triangle\mathrm{OAH_1}\text{の面積}} \\ &= 2\sqrt{5}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

☞ 解説

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}}_{\text{右下図 ① の扇形の面積}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{4}}_{\text{右下図 ② の直角三角形の面積}}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$





◇　　♡

解説

(1) は，凹凸を調べたいので $f''(x)$ の符号を調べるだけです．計算間違いに注意しましょう．(2) は，C 上の点を $(t,\,2t+\sqrt{5-5t^2})$ とおいて，原点との距離 d を求めますが，d が最大・最小となるときは，$t\sqrt{1-t^2}$ が最大・最小になればよいので，ここだけを取り出して考えます．解答の方針では，$y=g(t)$ が原点に関して対称であることを用いて最大・最小となるときを考えていますが，$t=\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$ とおいて，三角関数にしても求めることができます．(3) は，面積の計算です．立式は積分を用いますが，実際は，扇形と三角形の面積だけで計算できるので，積分計算をする必要はありません．面積計算 2 行目の定積分の式変形は，偶関数と奇関数の性質を利用して計算をしています．また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，解答のように，円の一部分を考えることで求められる頻出の計算方法ですから，求められるようにしておきましょう．

n を 0 以上の整数とする．$n+1$ 個の自然数 2^0, 2^1, $\cdots$, 2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか．ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[\,x\,]$ を用いて解答してよい．
注：例えば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である．

n を 0 以上の整数とする．$n+1$ 個の自然数 $2^0, 2^1, \cdots, 2^n$ の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか．ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[\,x\,]$ を用いて解答してよい．
注：例えば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である．

【テーマ】：常用対数

方針

具体的に $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ として実験をして，桁数と最上位の桁の数字の出現回数の関係を考えます．

♣ ♠

解答

2^n が k 桁の整数で，その最上位の数が 1 であるとすると，

$$1\cdot 10^{k-1} \leqq 2^n < 2\cdot 10^{k-1} \quad (k \text{ は自然数})$$

の形で表される．各辺に常用対数をとると，

$$\log_{10} 10^{k-1} \leqq \log_{10} 2^n < \log_{10} 2\cdot 10^{k-1} \iff k-1 \leqq n\log_{10} 2 < k-1+\log_{10} 2$$

ゆえに，$\log_{10} 2 > 0$ であることから，

$$\frac{k-1}{\log_{10} 2} \leqq n < \frac{k-1}{\log_{10} 2} + 1$$

と変形できるので，これを満たす 0 以上の整数 n は $\left[\dfrac{k-1}{\log_{10} 2}\right]+1$ のただ 1 つである．したがって，k 桁の数に対して 2^n の最上位の数が 1 となるものは 1 つしかないことが分かるので，2^n の桁数が $2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^n$ の中の最上位の桁の数字が 1 であるものの個数と一致する．

$$\log_{10} 2^n = n\log_{10} 2$$

であることから，2^n が N 桁の整数であるとすれば，

$$10^{N-1} \leqq 2^n < 10^N \iff N-1 \leqq n\log_{10} 2 < N \iff n\log_{10} 2 < N \leqq n\log_{10} 2 + 1$$

である．したがって，2^n の桁数は $n\log_{10} 2 + 1$ を超えない最大の整数と一致するので，

$$[\,n\log_{10} 2 + 1\,] = [\,n\log_{10} 2\,] + 1 \text{（桁）}$$

である．ゆえに，$2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^n$ の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものは，

$$\boldsymbol{[\,n\log_{10} 2\,] + 1} \textbf{（個）}\cdots\cdots\text{（答）}$$

ある．

♢ ♡

解説

この問題の本質は，1 から始めて数を 2 倍ずつしていく中で，最上位の桁の数字が 1 になるのはどのようなときであるかを見極めることにあります．順に 2 倍していくと，桁が 1 つ上がったときは必ず最上位の数は 1 になることがわかり，次に 2 倍すれば最上位の数字は 2 または 3 となります．このことから，桁が上がったときだけ最上位の数字が 1 になることが分かるので，これを証明します．よくよく考えれば当たり前のことに感じるかもしれませんが，その本質に気付きそれをきちんと証明する力が問われています．

$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする．

（1） 自然数 n, m に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$ を示せ．

（2） $f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$$

（3） すべての自然数 n に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする.

(1) 自然数 $n,\ m$ に対し, $\displaystyle\int_0^n t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$ を示せ.

(2) $f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 n に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ.

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，不等式を用いて証明する方法もあるし，面積の大小関係から証明する方法もあります. (2) は, (1) の結果を用いてはさみうちの原理で証明します. (3) は, (2) の結果を用いて求めます.

解答

(1) **【証明】**

k を 1 以上の自然数とし, $0 \leqq k-1 \leqq t \leqq k$ を満たす t を考えると, $0 \leqq t \leqq k \leqq t+1$ が成り立つ. 各辺は正であるから,

$$t^m \leqq k^m \leqq (t+1)^m$$

が成り立つ. この不等式は $k-1 \leqq t \leqq k$ で常に成り立つので，各辺を積分すると,

$$\int_{k-1}^{k} t^m\,dt \leqq \int_{k-1}^{k} k^m\,dt \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m\,dt \iff \int_{k-1}^{k} t^m\,dt \leqq k^m \leqq \int_{k-1}^{k}(t+1)^m\,dt$$

であり, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}(t+1)^m\,dt \iff \int_0^n t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$$

となり，示された. **(証明終)**

(2) **【証明】**

$f(x)=x^r+g(x)$ ($g(x)$ は $r-1$ 次の整式) とおくと,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}(k^r+g(k))=\sum_{k=1}^{n} k^r+\sum_{k=1}^{n} g(k)$$

一方, (1) より,

$$\int_0^n t^r\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^r \leqq \int_0^n (t+1)^r\,dt \iff \frac{1}{r+1}n^{r+1} \leqq \sum_{k=1}^{n} k^r \leqq \frac{1}{r+1}(n+1)^{r+1}$$

$$\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\sum_{k=1}^{n} g(k) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqq \frac{1}{r+1}(n+1)^{r+1}+\sum_{k=1}^{n} g(k)$$

$$\frac{1}{r+1}+\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} g(k) \leqq \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqq \frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1}+\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} g(k) \cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

$g(x)$ は $r-1$ 次の整式であるから, $g(x)=a_{r-1}x^{r-1}+a_{r-2}x^{r-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とおくと,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}(a_{r-1}k^{r-1}+a_{r-2}k^{r-2}+\cdots+a_1k+a_0)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{r-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-1}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{a_{r-2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^{r-1}}\cdot\frac{a_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\frac{1}{n^r}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_0\right)$$

ここで，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_i}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^i=\int_0^1 a_ix^i\,dx$ であるから，これは定数である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{r-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-1}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{a_{r-2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^{r-1}}\cdot\frac{a_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\frac{1}{n^r}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_0\right)$$
$$=0$$

となる．また，① において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1}=\frac{1}{r+1}$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{r+1}$$

が示された． **（証明終）**

(3)　$f(x)$ の次数を r とする．$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ の両辺を $n^r\neq 0$ で割ると，

$$\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2n^r}f(n)$$

となる．$n\to\infty$ のとき，左辺は (2) より $\dfrac{1}{r+1}$ に収束し，右辺は $f(x)$ の r 次の係数が 1 であることから，$\dfrac{1}{2}$ に収束することがわかる．したがって，

$$\frac{1}{r+1}=\frac{1}{2}\iff r=1$$

となるので，$f(x)=x+a$ とおくことができる．与えられた条件式は，すべての自然数 n に対して成り立つので，$n=1$ のときも成立するため，

$$\frac{1}{1}\sum_{k=1}^{1}f(k)=\frac{1}{2}f(1)\iff f(1)=\frac{1}{2}f(1)\iff f(1)=0$$

を得る．ゆえに，$f(1)=1+a$ であることから $a=-1$ を得る．逆にこのとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}f(n)$$

となり，与えられた条件式は，すべての自然数 n について成立するので，求める $f(x)$ は，

$\boldsymbol{f(x)=x-1}$……(答)

◇　♡

解説

(1) は，最初に不等式を作って証明しましたが，$y=x^m$ のグラフをかいて面積の大小関係から示すこともできます．(2) は，$r-1$ 次以下の扱いをうまく処理する必要があります．$n\to\infty$ とするとき，最高次の部分以外は 0 に収束するということをきちんと説明する必要があります．解答では，区分求積法を用いて定積分を導き出し，それが定数であることから 0 に収束することを示しています．(3) は，(2) の結果を用いることを考えます．$f(x)$ が r 次の整式という条件をあらかじめ述べておかなければ (2) の結果が適応できません．ここから次数を決定することになります．最後は，すべての自然数 n について成り立つなら $n=1$ でも成り立つので，そこから定数項を決定します．ただし，これはあくまで必要条件にすぎないので，十分性の証明をしなければいけないため，逆にすべての自然数 n で成り立つことを確かめています．

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$ をとる．曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i) $p>0,\ q>0$

(ii) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ．

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0), A(1, 0) をとる．曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i) $p>0,\ q>0$

(ii) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ．

【テーマ】：加法定理の応用

方針

$\tan\angle$POPQ を求めたいので，直線の傾きと $\tan\theta$ の関係を考えます．この他にもベクトルの内積を用いても求めることができます．

♣ ♠

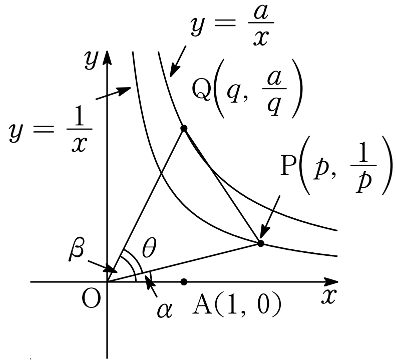
解答

直線 OP, OQ の傾きはそれぞれ $\dfrac{1}{p^2}$, $\dfrac{a}{q^2}$ であり，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$, $\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，条件 (ii) より，$\alpha<\beta$ である．また，

$$\tan\alpha=\frac{1}{p^2},\quad \tan\beta=\frac{a}{q^2}$$

であるから，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とすると，$\theta=\beta-\alpha$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}\\&=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}\ \cdots\cdots ①\end{aligned}$$



一方，(iii) より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\left|\frac{q}{p}-\frac{ap}{q}\right|\\3&=\frac{1}{2}\left|\frac{q^2-ap^2}{pq}\right|\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

である．ここで，$\tan\theta>0$ であり，$a>1$ であるから，① より，$ap^2-q^2>0$ である．したがって，条件 (i) を用いると，② より，

$$6pq=ap^2-q^2\ \cdots\cdots ③$$

を得るので，① へ代入して，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{6pq}{p^2q^2+a}\\&=\frac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\end{aligned}$$

$pq>0,\ a>1$ であるから，相加平均・相乗平均の関係から，

$$pq+\frac{a}{pq}\geqq 2\sqrt{pq\cdot\frac{a}{pq}}=2\sqrt{a}$$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のとき成立するので，これを満たす $p,\ q$ が存在するかどうかを確かめる．

$q=\dfrac{\sqrt{a}}{p}$ であるから，③ へ代入して，

$$6\sqrt{a}=ap^2-\frac{a}{p^2}\quad\Longleftrightarrow\quad ap^4-6\sqrt{a}p^2-a=0$$

$t=p^2$ とおくと，$t\geqq 0$ であり，$at^2-6\sqrt{a}t-a=0$ となるが，$f(t)=at^2-6\sqrt{a}t-a$ とおくとき，$a>1$ であり，$f(0)=-a<0$ となることから，$f(t)=0$ は 0 より大きい実数解をもつことがわかる．すなわち，正の数 p は存在することが確かめられたので，等号は成立する．ゆえに，

$$\tan\theta\leqq\frac{6}{2\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{a}}$$

となり，最大値 $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ をもつ．これが $\dfrac{3}{4}$ と等しいことから，

$$\frac{3}{\sqrt{a}}=\frac{3}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{a=16}\text{……(答)}$$

◇ ♡

解説

2 直線のなす角 θ を求める方法は，

(i) 直線の傾きと $\tan\theta$ の関係

(ii) ベクトルの内積

の 2 通りの考え方があります．(i) は，教科書などでもおなじみで $\tan\theta$ の加法定理を用いて求める方法です．本問の解答はこれを用いています．(ii) は，例えば傾きが m の直線があればその方向ベクトルの 1 つとして $\vec{d}=(1,\ m)$ をとることができるので，2 直線の方向ベクトルを求めれば，ベクトルの内積でなす角を求めることができます．ただし，この場合は $\cos\theta$ が出てくるので，$\tan\theta$ が求めたければ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いて式変形をしなければいけません．

本問では，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ となるので，

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$$

を用いて，$\cos\theta$ を求めます．問題によって，(i), (ii) のどちらで解くと効率よく計算できるかを考えて解法の選択ができるようにしておくとよいでしょう．

3 個の玉が横に一列に並んでいる．コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

（1） 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ．

（2） 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ．

3 個の玉が横に一列に並んでいる．コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

(1)　最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ．

(2)　最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1) は，最初に中央にあった玉が n 回後に中央にある確率を p_n として，数列 $\{p_n\}$ に関する漸化式を立てます．
(2) は，最初に右端にあった玉が n 回後に右端にある確率を q_n としますが，これだけでは漸化式が立てられないので，n 回後に中央にある確率を r_n として，漸化式を立てます．

♣ ♠

解答

(1)　最初に中央にあった玉が n 回後に中央にある確率を p_n とすると，n 回目に中央にあった玉が $n+1$ 回後に中央に来ることはないので，n 回後に左または右にあった玉が $n+1$ 回後に中央に来るときを考える．
いずれにしても確率 $\frac{1}{2}$ で中央に来るので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n) \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる．ゆえに，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．$p_1=0$ であるから，

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{p_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　最初に右端にあった玉が n 回後に右端にある確率を q_n，中央にある確率を r_n とすると，

(i)　n 回後に右端にある玉が $n+1$ 回後に右端に来るのは，表が出たときである．

(ii)　n 回後に中央にある玉が $n+1$ 回後に右端に来るのは，裏が出たときである．

ゆえに，

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，数列 $\{r_n\}$ について考える．(1) と同様に考えると，

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}(1-r_n) \text{ より，} r_n=\frac{1}{3}+\left(r_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．よって，$r_1=\frac{1}{2}$ より，

$$r_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\} \cdots\cdots ②$$

である．① の両辺に 2^{n+1} をかけると，

$$2^{n+1}q_{n+1}=2^nq_n+2^nr_n$$

となるので，$a_n=2^nq_n$ とおくと，

$$a_{n+1}=a_n+2^nr_n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^kr_k\\&=2q_1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{2^k-(-1)^k\}\\&=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left\{\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-\frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}\right\}\\&=1+\frac{2^n-2}{3}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{6}\\2^nq_n&=\frac{1}{2}+\frac{2^n}{3}+\frac{(-1)^n}{6}\\q_n&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{q_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，n 回後の状況と，$n+1$ 回後の状況を考えます．(1) は，中央にある確率なので，右端から来る確率と左端から来る確率がともに $\frac{1}{2}$ であることから，まとめて考えることができます．すなわち，中央にない確率を $1-p_n$ とすればよいのです．(2) は右端にある確率を考えるため，(1) のようにはいきません．そこで，n 回後に中央にある確率を設定して q_n と r_n を用いて漸化式を導きます．このままでは解けないので，(1) をヒントに r_n を求めればよいことに気付くことがポイントとなります．あとは，漸化式の問題なので頻出の漸化式は必ず解けるようにしておきましょう．

関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を ℓ_a とし，ℓ_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，実数 k に対して $\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$0<a<b$ である a,b に対して，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ．

(3)　(2) の a,b に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく．$\lim_{a\to+0} Z(a)$ および $\lim_{a\to+0} \dfrac{Z'(a)}{a}$ を求めよ．

関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を ℓ_a とし，ℓ_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，実数 k に対して $\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$0<a<b$ である a, b に対して，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ．

(3)　(2) の a, b に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく．$\lim_{a\to+0} Z(a)$ および $\lim_{a\to+0}\dfrac{Z'(a)}{a}$ を求めよ．

【テーマ】：接線と最大・最小

方針

(1) は，接線 ℓ_a の方程式を求めて，y 軸との交点を求め，その最大値を考えます．
(2) は，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるので，それぞれの x 軸との交点が一致することから式を立てます．(3) は，与えられた極限値の式 $\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ を利用して極限値を求めます．

♣　♠

解答

(1)　$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より，接線 ℓ_a の方程式は，

$$y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)+e^{-\frac{a^2}{2}} \iff y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

であるから，これより

$$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$Y'(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}+(a^2+1)\cdot(-a)e^{-\frac{a^2}{2}}=(-a^3+a)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

となるので，$e^{-\frac{a^2}{2}}>0$ であることから，$Y'(a)=0$ のとき，$-a^3+a=0$ である．$a>0$ より $a=0, 1$ であるから，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$Y'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$Y(a)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	(0)

$$\lim_{a\to+\infty}(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}=\lim_{t\to\infty}(2t+1)e^{-t}\ \left(\because\ \frac{a^2}{2}=t\right)$$
$$=0\ \cdots\cdots(*)$$

ゆえに，$\boldsymbol{0<Y(a)\leqq\dfrac{2}{\sqrt{e}}}$……**(答)**

(2)　(1) より，

$$\ell_a\ :\ y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\ell_b\ :\ y=-be^{-\frac{b^2}{2}}x+(b^2+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$$

ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるときは，$y=0$ としたときの x の値が等しければよいので，$e^{-\frac{a^2}{2}}\neq 0$, $e^{-\frac{b^2}{2}}\neq 0$ より，

$$\frac{a^2+1}{a}=\frac{b^2+1}{b} \iff (ab-1)(a-b)=0$$

$a \neq b$ より，$ab = 1$ であるから，$\boldsymbol{b = \frac{1}{a}}$……(答)

また，$0 < a < b$ より，

$$0 < a < \frac{1}{a} \iff 0 < a^2 < 1$$

$a > 0$ より，$\boldsymbol{0 < a < 1}$……(答)

(3) (1) より，

$$\lim_{a \to +0} Y(a) = \lim_{a \to +0} (a^2 + 1)e^{-\frac{a^2}{2}} = 1, \quad \lim_{a \to +0} Y(b) = \lim_{a \to +0} Y\left(\frac{1}{a}\right)$$

$\frac{1}{a} = t$ とおくと，$a \to +0$ のとき，$t \to +\infty$ であるから，

$$\lim_{a \to +0} Y\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \quad (\because \ (*))$$

ゆえに，

$$\lim_{a \to +0} Z(a) = 1 - 0 = \mathbf{1} \text{……(答)}$$

また，

$$\begin{aligned} Z'(a) &= Y'(a) - Y'\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) \\ &= Y'(a) + \frac{1}{a^2} Y'\left(\frac{1}{a}\right) \\ \frac{Z'(a)}{a} &= \frac{1}{a} Y'(a) + \frac{1}{a^3} Y'\left(\frac{1}{a}\right) \\ &= (-a^2 + 1)e^{-\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{a^3}\left(-\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{1}{2a^2}} \ \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

ここで，$\frac{1}{2a^2} = u$ とおくと，$a \to +0$ のとき，$u \to +\infty$ であるから，

$$\lim_{a \to +0} \frac{1}{a^3}\left(-\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{1}{2a^2}} = \lim_{u \to +\infty} (-8u^3 + 4u^2)e^{-u} = 0 \quad \left(\because \ \lim_{t \to \infty} t^k e^{-t} = 0\right)$$

ゆえに，① より，

$$\lim_{a \to +0} \frac{Z'(a)}{a} = 1 + 0 = \mathbf{1} \text{……(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，接線の方程式を求めて y 軸との交点を求めその最大値を考えればよいのですが，解答にもあるように $a \to +\infty$ の場合を調べる必要があります．$Y(a)$ の式から $Y(a) > 0$ であることは予想できますが，$a \to +\infty$ の極限値が 0 から 1 の間に存在する可能性もあるので，調べなければ減点されるでしょう．

(2) は，2 接線の交点を求めるのではなく，2 接線が x 軸上で交わるので，x 軸との交点が一致すると考える方が計算が楽に行えます．ここでは，$a \neq b$ であることから a, b の関係式が導けます．

(3) は，極限値の問題なので，曖昧な極限値の計算をすることがないようにしましょう．問題文に与えられている $\lim_{t \to \infty} t^k e^{-t} = 0$ を使うために式変形をして，極限値を求めていきます．

a, b, c を自然数とするとき，次の不等式を示せ.

（1） $2^{a+b} \geqq 2^a + 2^b$

（2） $2^{a+b+c} \geqq 2^a + 2^b + 2^c + 2$

（3） $2^{a+b+c} \geqq 2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} - 4$

a, b, c を自然数とするとき，次の不等式を示せ.

(1)　$2^{a+b} \geqq 2^a + 2^b$

(2)　$2^{a+b+c} \geqq 2^a + 2^b + 2^c + 2$

(3)　$2^{a+b+c} \geqq 2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} - 4$

【テーマ】：不等式の証明

方針

a, b, c は自然数なので，$2^a \geqq 2, 2^b \geqq 2, 2^c \geqq 2$ となります．そこで，$x = 2^a - 2$ などと置いて，x, y, z の式に変形します.

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

a, b は自然数であるから，$x = 2^a - 2, y = 2^b - 2$ とおくと，$x \geqq 0, y \geqq 0$ である.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b - (2^a + 2^b)\\ &= (x+2)(y+2) - (x+2+y+2)\\ &= xy + 2(x+y) + 4 - (x+y) - 4\\ &= xy + x + y \geqq 0\end{aligned}$$

である．等号は，$a = b = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された.　**(証明終)**

(2)　**【証明】**

a, b, c は自然数であるから，$x = 2^a - 2, y = 2^b - 2, z = 2^c - 2$ とおくと，$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ である.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - (2^a + 2^b + 2^c + 2)\\ &= (x+2)(y+2)(z+2) - (x+2+y+2+z+2+2)\\ &= xyz + 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 8 - (x+y+z) - 8\\ &= xyz + 2(xy+yz+zx) + 3(x+y+z) \geqq 0\end{aligned}$$

である．等号は，$a = b = c = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された.　**(証明終)**

(3)　**【証明】**

(2) と同様に x, y, z を定めると，

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^a - 4\\ &= (x+2)(y+2) + (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) - 4\\ &= xy + yz + zx + 4(x+y+z) + 8\end{aligned}$$

であるから，

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - (2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^a - 4)$$

$$
\begin{aligned}
&= xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -\{xy + yz + zx + 4(x + y + z) + 8\} \\
&= xyz + (xy + yz + zx) \geqq 0
\end{aligned}
$$

である．等号は，$a = b = c = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

置き換えをせずにそのまま計算をしても示すことはできますが，$2^a \geqq 2$ のままやるよりも $x = 2^a - 2 \geqq 0$ としてやる方が 0 以上を示すためにはよいでしょう．

各小問は独立しています（前問の結果を利用しなくても解ける）が，同じ考え方で証明を進めていくため，(1)，(2) が解けなければ (3) を解くのは難しいでしょう．不等式の証明問題は，前問の結果を利用しなければ証明が困難なものも少なくないので，前問の結果を利用するという考え方を持っておくことも大切です．