(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ.

(2)　p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ.

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ.

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ.

(2)　p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ.

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ.

【テーマ】：背理法

方針

(1) では，$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ とおくことで矛盾を導きます.(2) では，2 数の小数部分が等しいということは，2 数の差が整数であればよいことに気付き (1) の結果から背理法で示します.(3) は，不等式を利用してうまく大小関係を作ります.

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \iff 3 = 2^{\frac{m}{n}} \iff 3^n = 2^m$$

m, n が自然数であることから，左辺は奇数であり，右辺は偶数であるから矛盾．ゆえに，題意は示された.

(証明終)

(2)　**【証明】**

$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定すると，2 数の差

$$|p\log_2 3 - q\log_2 3| = |p-q|\log_2 3$$

は自然数となるので，k を自然数として，

$$|p-q|\log_2 3 = k$$

とおける．$p-q \neq 0$ であるから，

$$\log_2 3 = \frac{k}{|p-q|}$$

となるが，(1) よりこれを満たす自然数 k, $|p-q|$ は存在しないので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことが示された.

(証明終)

(3)　$2^3 < 3^2$ において，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$3 < \log_2 3^2 \iff 1.5 < \log_2 3$$

一方，$3^5 < 2^8$ において，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 3^5 < 8 \iff \log_2 3 < 1.6$$

ゆえに，

$$1.5 < \log_2 3 < 1.6$$

となるので，$\log_2 3$ の小数第 1 位は **5**……**(答)**

♢　♡

解説

(1) は，「$\log_2 3$ が無理数であることを証明せよ.」という問題です．背理法の基本なので完答したい問題です．背理法は，結論を否定して矛盾を導く論法です．この問題では，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを示したいので，それを否定したもの，すなわち m, n が存在するとして計算を進めて矛盾を導きます．実際に，$3^n=2^m$ という形が出てくるので，(奇数) = (偶数) という矛盾した式になり，自然数 m, n は存在しないことになります.

(2) は，2 数の小数部分が等しいことは，2 数の差が整数であることと同値なので，それに気付くことがポイントです．あとは (1) の結果をうまく利用できるかどうかです.

(3) は，解答のように $2^3<3^2$ や $3^5<2^8$ という不等式から底を 2 とする対数をとって大小を比較してもよいですし，次のように $10\log_2 3$ を考えてその整数部分の 1 の位の数を求めてもよいです.

別解

(3)　$\log_2 3$ の小数第 1 位の数は，$10\log_2 3$ の整数部分の一の位と一致する．a を整数とするとき，

$$a \leqq 10\log_2 3 < a+1$$

を満たす a を求めればよい.

$$a \leqq 10\log_2 3 < a+1 \iff \log_2 2^a \leqq \log_2 3^{10} < \log_2 2^{a+1} \iff 2^a \leqq 3^{10} < 2^{a+1}$$

である．ここで，

$$3^{10}=59049,\quad 2^{15}=32768,\quad 2^{16}=65536$$

より，$a=15$ である．したがって，

$$10\log_2 3 = 15.\cdots\cdots \iff \log_2 3 = 1.5\cdots\cdots$$

であるから，$\log_2 3$ の小数第 1 位は **5**……(答)

平面上の動点 P の x 座標，y 座標がともに時刻 t の微分可能な関数で

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t \geqq 0)$$

と表される．ただし，$g(t) > f(t)$，$f(0) = 1$ かつ $f(t)$ は t の増加関数とする．時刻 t における点 P の速度の大きさは $\sqrt{2(2t^2+6t+5)}$ で，点 P と直線 $y = x$ との距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^2$ である．このとき，関数 $f(t)$, $g(t)$ を定め，点 P のえがく曲線を xy 平面上に図示せよ．

平面上の動点 P の x 座標，y 座標がともに時刻 t の微分可能な関数で

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t \geqq 0)$$

と表される．ただし，$g(t) > f(t)$，$f(0) = 1$ かつ $f(t)$ は t の増加関数とする．時刻 t における点 P の速度の大きさは $\sqrt{2(2t^2+6t+5)}$ で，点 P と直線 $y = x$ との距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^2$ である．このとき，関数 $f(t)$, $g(t)$ を定め，点 P のえがく曲線を xy 平面上に図示せよ．

【テーマ】：速度

方針

点 P の速度の大きさと点 P と直線 $y = x$ との距離から $f'(t)$ と $g'(t)$ の連立方程式を導きます．

♣ ♠

解答

点 P の速度の大きさは，$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ であるから，題意より，

$$\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2} = \sqrt{2(2t^2+6t+5)}$$

が成り立つ．両辺正であるから 2 乗して，

$$\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2 = 2(2t^2+6t+5) \cdots\cdots ①$$

一方，点 P と直線 $y = x$ との距離は，

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{g(t)-f(t)}{\sqrt{2}} \quad (\because \ g(t) > f(t))$$

であるから，題意より，

$$\frac{g(t)-f(t)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^2 \iff g(t)-f(t) = (t+1)^2 \cdots\cdots ②$$

両辺を t で微分すると，

$$g'(t)-f'(t) = 2(t+1) \cdots\cdots ③$$

①, ③ より，

$$\{f'(t)\}^2+\{f'(t)+2(t+1)\}^2 = 2(2t^2+6t+5)$$
$$\{f'(t)\}^2+\{f'(t)\}^2+4(t+1)f'(t)+4(t+1)^2 = 4t^2+12t+10$$
$$2\{f'(t)\}^2+4(t+1)f'(t)-4t-6 = 0$$
$$\{f'(t)-1\}\{f'(t)+2t+3\} = 0$$

$f(t)$ は t の増加関数なので，$f'(t) > 0$ であり，$t \geqq 0$ であることから，

$$f'(t) = 1$$

である．したがって，$f(t) = t + C$ (C は定数) と表される．$f(0) = 1$ であるから，$C = 1$ となるので，

$$f(t) = t+1$$

である．よって，② より，

$$g(t) = (t+1)^2 + f(t) = (t+1)^2 + (t+1)$$

$$\therefore \quad g(t) = t^2 + 3t + 2$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(t) = t + 1} \\ \boldsymbol{g(t) = t^2 + 3t + 2} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

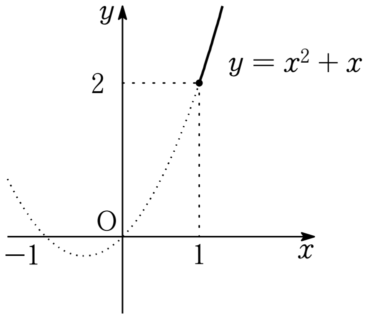
$x = f(t),\ y = g(t)$ であるから，t を消去すると，

$$y = x^2 + x$$

であり，$t \geqq 0$ より，$x \geqq 1$ である．ゆえに，点 P がえがく曲線は，

放物線 ： $y = x^2 + x$ （$x \geqq 1$）

である．グラフは右図太線部分．



◇ ♡

解説

前半には速度に関する記述がありますが，立式ができれば連立方程式から $f(t),\ g(t)$ を求める問題になります．$f'(t) = 1$ のように微分を含んだ方程式を微分方程式といいます．本問では不定積分すれば簡単に解けるので，微分方程式の知識がなくても容易に解けるでしょう．本問のポイントは，$f(t)$ が t の増加関数であるという問題の条件をしっかりと解答に生かせているか？すなわち $f'(t) = -2t - 3$ は不適であることを議論できているかにあります．

p, q を実数とし，$p<q$ とする．さらに，3 つの数 4, p, q をある順に並べると等比数列となり，ある順に並べると等差数列となるとする．このとき，p, q の組 (p, q) をすべて求めよ．

p, q を実数とし，$p < q$ とする．さらに，3 つの数 4, p, q をある順に並べると等比数列となり，ある順に並べると等差数列となるとする．このとき，p, q の組 (p, q) をすべて求めよ．

【テーマ】：等差中項・等比中項

方針

全パターンを場合分けで求めることもできますが，p, q の符号を考えると，3 数の中項はどれかが明確になるので，場合分けが減らせます．

♣ ♠

解答

(i) $0 < 4 < p < q$ のとき，

$$4 + q = 2p \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q = p^2 \cdots\cdots ②$$

①, ② より，

$$p^2 - 8p + 16 = 0 \iff (p-4)^2 = 0$$

よって，$p = 4$, $q = 4$ となり，不適．

(ii) $0 < p < 4 < q$ のとき，

$$p + q = 8 \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，このとき，等比中項は 4 であるから，

$$pq = 16 \cdots\cdots ④$$

③, ④ より，p, q を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \iff (x-4)^2 = 0$$

よって，$p = 4$, $q = 4$ となり，不適．

(iii) $0 < p < q < 4$ のとき，

$$p + 4 = 2q \cdots\cdots ⑤$$

が成り立ち，このとき，等比中項は q であるから，

$$4p = q^2 \cdots\cdots ⑥$$

⑤, ⑥ より，

$$q^2 - 8q + 16 = 0 \iff (q-4)^2 = 0$$

よって，$p = 4$, $q = 4$ となり，不適．

(iv) $p < 0 < 4 < q$ のとき，

$$p + q = 8 \cdots\cdots ⑦$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q = p^2 \cdots\cdots ⑧$$

⑦, ⑧ より，

$$p^2 + 4p - 32 = 0 \iff (p+8)(p-4) = 0$$

$p < 0$ であるから，$p = -8$, $q = 16$ となり，これは条件を満たす．

(v) $p < 0 < q < 4$ のとき，

$$p + 4 = 2q \cdots\cdots ⑨$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q = p^2 \cdots\cdots ⑩$$

⑨, ⑩ より，

$$p^2 - 2p - 8 = 0 \iff (p-4)(p+2) = 0$$

$p < 0$ であるから，$p = -2$, $q = 1$ となり，これは条件を満たす．

(vi) $p < q < 0 < 4$ のとき，

$$p + 4 = 2q \cdots\cdots ⑪$$

が成り立ち，このとき，等比中項は 4 であるから，

$$pq = 16 \cdots\cdots ⑫$$

⑪, ⑫ より，

$$q^2 - 2q - 8 = 0 \iff (q-4)(q+2) = 0$$

$q < 0$ であるから，$q = -2$, $p = -8$ となり，これは条件を満たす．

以上より，求める p, q の組は，

$$\boldsymbol{(p, q) = (-8, 16),\ (-2, 1),\ (-8, -2)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(iv), (v), (vi) では，等比中項がどれになるかよく考えましょう．等差数列は大小関係ですぐに等差中項がわかりますが，等比数列は，同符号なら大小のままですが，異符号の数がある場合は，大小のままにはなりません．それは，公比が負になっているためです．したがって，(iv), (v) では，p が，(vi) では 4 が等比中項となります．

p, q, 4 とその大小関係をとりあえず無視して計算を行い，最後に大小関係をつけて求めると次のようになります．

別解

3 数 a, b, c がこの順に等差数列をなすとき，

$$a+c=2b \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

が成り立つ．さらに，a, b, c を適当に並べたものが等比数列をなすとき，Ⓐ が a, c に関して対称であるから，等比中項は a, b のいずれかを考えればよい．

(i) a が等比中項のとき，

$bc=a^2$ であるから，Ⓐ を用いて c を消去すると，

$$a^2+ba-2b^2=0 \iff (a+2b)(a-b)=0$$

を得るが，$a=b$ のときは，$a=b=c$ となるので不適．したがって，$a=-2b$ のときを考える．このとき，$c=4b$ となるので，

- $a=4$ のとき，$b=-2$, $c=-8$ であるから，$(p,\ q)=(-8,\ -2)$
- $b=4$ のとき，$a=-8$, $c=16$ であるから，$(p,\ q)=(-8,\ 16)$
- $c=4$ のとき，$a=-2$, $b=1$ であるから，$(p,\ q)=(-2,\ 1)$

(ii) b が等比中項のとき，

$ac=b^2$ であるから，a, c を 2 解とする 2 次方程式は，

$$x^2-2bx+b^2=0 \iff (x-b)^2=0$$

ゆえに，$a=b=c$ となるので，不適．

以上より，求める p, q の組は，

$(p,\ q)=(-8,\ 16)$，$(-2,\ 1)$，$(-8,\ -2)$……(答)

O を原点とする座標平面上に点 $P_0(1, 1)$, $Q_0(1, 0)$ がある．ある p $(0 < p < 1)$ に対して，点 $P_1(p, p)$, $Q_1(p, 0)$ を定め，さらに，自然数 n について点 P_{n+1}, Q_{n+1} を次のように定める．

・点 Q_n を通り直線 Q_0P_1 と平行な直線と，直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする．

・点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と，x 軸の交点を Q_{n+1} とする．

また，$\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　S_1 を p を用いて表せ．

(2)　点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき，点 Q_n の x 座標を p, q を用いて表せ．

(3)　S_n を p, n を用いて表せ．

(4)　n を定数として，p を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき，S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5)　(4) で求めた S_n に対して，$\lim_{n \to \infty} nS_n$ を求めよ．

O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}_0(1,\ 0)$ がある．ある $p\ (0<p<1)$ に対して，点 $\mathrm{P}_1(p,\ p)$, $\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ を定め，さらに，自然数 n について点 P_{n+1}, Q_{n+1} を次のように定める．

・点 Q_n を通り直線 $\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1$ と平行な直線と，直線 OP_0 の交点を P_{n+1} とする．

・点 P_{n+1} を通り y 軸と平行な直線と，x 軸の交点を Q_{n+1} とする．

また，$\triangle\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を S_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　S_1 を p を用いて表せ．

(2)　点 Q_{n-1} の x 座標を q とするとき，点 Q_n の x 座標を $p,\ q$ を用いて表せ．

(3)　S_n を $p,\ n$ を用いて表せ．

(4)　n を定数として，p を $0<p<1$ の範囲で動かすとき，S_n を最大にする p とそのときの S_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5)　(4) で求めた S_n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

【テーマ】：無限等比級数と極限

方針

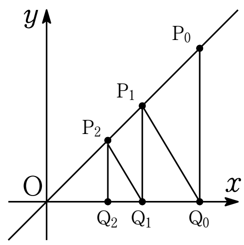
(1)〜(3) は，面積 S_n を求める誘導です．漸化式を立式して解けば求まります．(4) は，最大値を求めたいので微分しましょう．(5) は，関数の極限に関する公式が必要になります．

♣　♠

解答

(1)　S_1 は $\triangle\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ の面積である．$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=p$, $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0=1-p$ であるから，

$$S_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}p(1-p)}\cdots\cdots(\text{答})$$



(2)　直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_0$ の傾きは，$\dfrac{p}{p-1}$ であるから，直線 $\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の方程式は，

$$y=\frac{p}{p-1}(x-q)$$

である．これと $y=x$ の交点が P_n であるから，

$$x=\frac{p}{p-1}(x-q)$$
$$x=pq$$

ゆえに，Q_n の x 座標は，$\boldsymbol{pq}$……(答)

(3)　Q_n の x 座標を q_n とする．このとき，(2) より，$q_{n+1}=pq_n$ となるので，$q_0=1$ より，

$$q_n=p^n$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\times\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n-1}\\&=\frac{1}{2}p^n\left(p^{n-1}-p^n\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(p^{2n-1}-p^{2n}\right)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4) (3) より，S_n を p で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dS_n}{dp} &= \frac{1}{2}\left\{(2n-1)p^{2n-2} - 2np^{2n-1}\right\}\\ &= \frac{1}{2}p^{2n-2}(2n-1-2np)\end{aligned}$$

$0<p<1$ より，$\dfrac{dS_n}{dp}=0$ となるのは，$p=\dfrac{2n-1}{2n}$ のときで，このとき，増減表は次のようになる.

p	0	$\cdots$	$\frac{2n-1}{2n}$	$\cdots$	1
$\frac{dS_n}{dp}$		$+$	0	$-$	
S_n		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，S_n が最大となる p は，

$$p=\boldsymbol{\frac{2n-1}{2n}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

であり，このとき，

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}\left(1-\frac{2n-1}{2n}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

である.

(5) (4) より，求める極限値は，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nS_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\frac{2n}{2n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[\left\{1+\frac{1}{(-2n)}\right\}^{-2n}\right]^{-1}\cdot\frac{2}{2-\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{4}e^{-1}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{4e}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇　♡

解説

丁寧な誘導があるので，一つ一つの設問を確実に解けるようにしましょう.(5) では，自然対数の底に冠する極限を利用しなければいけないので，忘れていた人は思い出しておきましょう.

【自然対数の底に関する極限】

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

これらの公式は，置き換えを行うことで同値であることが証明できる.

O を原点とする座標平面上の円 $x^2+y^2-10x-10y+49=0$ を C とする．原点 O を通り，円 C に接する直線のうち，傾きの大きい方を ℓ とする．

（1） ℓ の傾きを求めよ．

（2） x 軸に接し，円 C と外接するような円の中心 P の描く軌跡を求めよ．

（3） 直線 ℓ と x 軸に接し，さらに円 C と外接する円の半径をすべて求めよ．

O を原点とする座標平面上の円 $x^2+y^2-10x-10y+49=0$ を C とする．原点 O を通り，円 C に接する直線のうち，傾きの大きい方を ℓ とする．

(1)　ℓ の傾きを求めよ．

(2)　x 軸に接し，円 C と外接するような円の中心 P の描く軌跡を求めよ．

(3)　直線 ℓ と x 軸に接し，さらに円 C と外接する円の半径をすべて求めよ．

【テーマ】：円と直線の位置関係

方針

円と直線が接するときは，円の中心と直線までの距離が円の半径と一致するときです．2 円が外接するときは，それぞれの円の中心間の距離が半径の和と一致します．

解答

(1)　$C:(x-5)^2+(y-5)^2=1$ であるから，この円の中心は $(5,5)$ であり，半径は 1 である．
ℓ の傾きを k とすると，ℓ の方程式は $y=kx$ と表せる．ℓ と C が接するとき，点 $(5,5)$ と直線 ℓ との距離が円の半径 1 と一致するので，

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \iff 5|k-1|=\sqrt{k^2+1}$$

両辺 2 乗して整理すると，

$$25(k-1)^2=k^2+1 \iff 12k^2-25k+12=0$$

$$\therefore\ (3k-4)(4k-3)=0$$

より，$k=\frac{4}{3},\ \frac{3}{4}$ を得る．大きい方が ℓ の傾きなので，直線 ℓ の傾きは，$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$……**(答)**

(2)　$\mathrm{P}(X,Y)$ とおくと，P を中心とする円が x 軸と接するので，その半径は Y となる．一方，円 C と外接するとき，2 円の中心間の距離が半径の和と一致するので，

$$\sqrt{(X-5)^2+(Y-5)^2}=Y+1$$

$$(X-5)^2+(Y-5)^2=(Y+1)^2 \iff Y=\frac{1}{12}(X-5)^2+2\ \cdots\cdots\ ①$$

ゆえに，P の描く軌跡は，

放物線：$\boldsymbol{y=\frac{1}{12}(x-5)^2+2}$……(答)

(3)　(2) の ① を満たし，さらに点 (X,Y) と ℓ の距離が Y となれば題意を満たすので，

$$\frac{\left|\frac{4}{3}X-Y\right|}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=Y \iff \left|\frac{4}{3}X-Y\right|=\frac{5}{3}Y$$

$$\frac{4}{3}X-Y=\frac{5}{3}Y \text{ または } \frac{4}{3}X-Y=-\frac{5}{3}Y$$

すなわち，$X=2Y$ または $X=-\frac{1}{2}Y$ である．

(i)　$X=2Y$ のとき，① から，

$$Y=\frac{1}{12}(2Y-5)^2+2 \iff 4Y^2-32Y+49=0$$
$$Y=\frac{16\pm2\sqrt{15}}{4}=\frac{8\pm\sqrt{15}}{2}$$

(ii) $X=-\frac{1}{2}Y$ のとき，① から，

$$Y=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}Y-5\right)^2+2 \iff Y^2-28Y+196=0$$
$$(Y-14)^2=0$$

よって，$Y=14$ である．

以上より，求める円の半径は，

$$\boldsymbol{\frac{8\pm\sqrt{15}}{2},\ 14}\text{……（答）}$$

◇ ♡

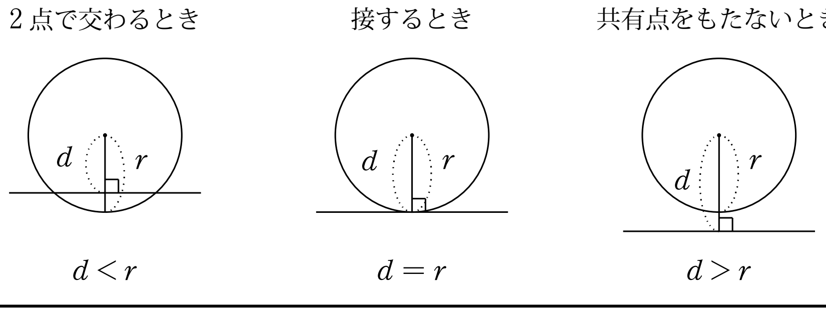
解説

円と直線，円と円の位置関係をテーマとした問題は頻出です．本問は，接するときをメインに扱っていますので，円と直線，円と円が接するときの条件を考えます．

円と直線が接するとき，代入して判別式へ持っていく人が多くいますが，それでは計算量が多くなることもあり，あまりお勧めできません．解答のように，円の中心と直線までの距離が半径と等しくなることを用いれば，点と直線の距離公式だけで処理ができます．また，円同士が接するときも中心間の距離と半径の和が一致することを用いましょう．

【円と直線の位置関係】

円の半径を r とし，円の中心と直線までの距離を d とすると，d と r には次の関係がある．



空間内に 4 点 $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{5},\ 2,\ \dfrac{12}{5}\right)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{P}(u,\ v,\ w)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる実数 s, t が存在するための u, v, w の条件を求めよ．

(2)　さらに A, B, C, P が同一円周上にあるとき，v, w を u を用いて表せ．ただし $v > 0$ とする．

(3)　P から直線 AC に垂線 PH を引く．P が (2) の条件を満たしながら動くとき，△AHP の面積の最大値とそのときの u の値を求めよ．

空間内に 4 点 A$(4,\ 0,\ 0)$, B$\left(\dfrac{4}{5},\ 2,\ \dfrac{12}{5}\right)$, C$(0,\ 0,\ 3)$, P$(u,\ v,\ w)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる実数 $s,\ t$ が存在するための $u,\ v,\ w$ の条件を求めよ．

(2)　さらに A, B, C, P が同一円周上にあるとき，$v,\ w$ を u を用いて表せ．ただし $v>0$ とする．

(3)　P から直線 AC に垂線 PH を引く．P が (2) の条件を満たしながら動くとき，△AHP の面積の最大値とそのときの u の値を求めよ．

【テーマ】：整式の除法

方針

(1) は，成分計算を行い，(2) は，$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ であることを見抜きます．

♣　♠

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$(u-4,\ v,\ w)=s\left(-\frac{16}{5},\ 2,\ \frac{12}{5}\right)+t(-4,\ 0,\ 3)$$

成分を比較して，

$$\begin{cases} u-4=-\dfrac{16}{5}s-4t & \cdots\cdots\ ① \\ v=2s & \cdots\cdots\ ② \\ w=\dfrac{12}{5}s+3t & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

② より，$s=\dfrac{1}{2}v$ であるから，① より，

$$u-4=-\frac{8}{5}v-4t \iff t=-\frac{1}{4}u-\frac{2}{5}v+1$$

これらが ③ も満たせばよいので，

$$w=\frac{6}{5}v-\frac{3}{4}u-\frac{6}{5}v+3$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{3u+4w=12}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{5}(-8,\ 5,\ 6)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{5}(-4,\ -10,\ 3)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{25}(32-50+18)=0$$

よって，$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ であることがわかる．

ゆえに，△ABC の外接円の中心は AC の中点で，$\left(2,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ であり，半径は $\dfrac{\mathrm{AC}}{2}=\dfrac{5}{2}$ である．

したがって，点 P は，球面

$$(x-2)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

上にあるので，

$$(u-2)^2+v^2+\left(w-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

を満たす．(1) より，$w=-\dfrac{3}{4}u+3$ であるから，これを代入して，

$$(u-2)^2+v^2+\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\quad v^2=\frac{25}{16}(4u-u^2)$$

$v>0$ より，

$$\boldsymbol{v=\frac{5}{4}\sqrt{4u-u^2}\ \ (0<u<4)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (k>0)$ とおく．$\mathrm{PH}\perp\mathrm{AC}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\iff k\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}=-\frac{1}{4}u+1$$

よって，$\mathrm{AH}=k\mathrm{AC}=5\left(-\dfrac{1}{4}u+1\right)$ である．

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}&=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}\\&=\sqrt{(u-4)^2+v^2+w^2-25\left(-\frac{1}{4}u+1\right)^2}\\&=\frac{5}{4}\sqrt{u(4-u)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{AHP}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{PH}=\frac{25}{32}\sqrt{u(4-u)^3}$$

$f(u)=u(4-u)^3$ とおくと，

$$f'(u)=4(1-u)(4-u)^2$$

であるから，$0<u<4$ で $f'(u)=0$ となるのは，$u=1$ のときである．

u	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	27	$\searrow$	

よって，$u=1$ のとき，$f(u)$ は最大値 27 をとるので，$\triangle\mathrm{AHP}$ の最大値は，

$$\frac{25}{32}\sqrt{27}=\boldsymbol{\frac{75\sqrt{3}}{32}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇　♡

解説

$\triangle\mathrm{AHP}$ の最大値を求める際は，根号内を $f(u)$ とおいて，根号内の最大値を求めましょう．特に，理系の人で数学 Ⅲ の微分を学習すると $f(u)=\sqrt{u(4-u)^3}$ とおいて微分して最大値を求める人が出てきますが，面倒な計算の挙句に計算間違いを起こしかねません．ちょっとした工夫が計算量を減らし楽に回答できるのです．
例えば，$f(x)=\cos x\sqrt{1-\sin x}\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよという問題はどのように求めますか？文系の人も考えてみてください．

極方程式 $2r^2\cos^2\theta+r^2-6r\sin\theta=3$ で与えられる曲線がある．次の各問いに答えよ．

（1） この曲線を x, y 座標に関する方程式で表し，そのグラフの概形をかけ．

（2） この曲線の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

極方程式 $2r^2\cos^2\theta+r^2-6r\sin\theta=3$ で与えられる曲線がある．次の各問いに答えよ．

（1） この曲線を x, y 座標に関する方程式で表し，そのグラフの概形をかけ．

（2） この曲線の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

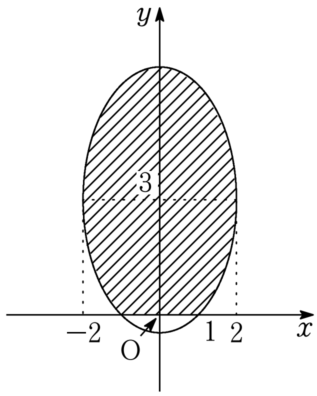
【テーマ】：極座標と極方程式

方針

極座標から直交座標への変換は，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で行います．

♣ ♠

解答



（1） 与えられた極方程式において，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると，

$$2x^2+x^2+y^2-6y=3$$

となるので，これを整理して，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{12}=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{12}=1$ のグラフと x 軸との交点は，$y=0$ として，

$$\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}=1 \text{ すなわち } x=\pm 1$$

であるから，$(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ である．また，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{12}=1$ を y について解くと，

$$(y-3)^2=12-3x^2$$

$$y-3=\pm\sqrt{12-3x^2} \iff y=3\pm\sqrt{12-3x^2}$$

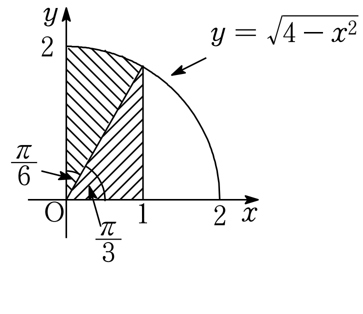
ゆえに，求める面積 S は，y 軸における対称性から，

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^1\left(3+\sqrt{12-3x^2}\right)dx+\int_1^2\left\{3+\sqrt{12-3x^2}-\left(3-\sqrt{12-3x^2}\right)\right\}dx\\&=2\int_0^1\left(3+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}\right)dx+4\sqrt{3}\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで，右図斜線部分の面積から，

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx&=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}}_{\text{扇形の面積}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}}_{\text{直角三角形の面積}}\\&=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx&=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



よって，

$$\begin{aligned}S&=2\left\{3+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}+4\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\boldsymbol{3+\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◊ ♡

解説

極座標から直交座標への変換は基本問題です．$r^2 = x^2 + y^2$ となることにも注意しましょう．(2) では，面積の計算を行いますが，公式通り立式しました．$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ の計算は，$x = 2\sin\theta$ とおいて置換積分を用いてもできますが，$y = \sqrt{4-x^2}$ は円の上半分を表しているので，扇形と直角三角形の面積を用いれば積分計算の代用になります．頻出なので理解して使えるようにしておきましょう．

一つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている．この箱から k 枚 $(3 \leqq k \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする．

(1)　$p(k)$ を求めよ．

(2)　$4 \leqq k \leqq 12$ のとき，$f(k) = \dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ．

(3)　$p(k)$ を最大にする k の値を求めよ．

一つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている．この箱から k 枚 $(3 \leqq k \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする．

(1)　$p(k)$ を求めよ．

(2)　$4 \leqq k \leqq 12$ のとき，$f(k)=\dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ．

(3)　$p(k)$ を最大にする k の値を求めよ．

【テーマ】：確率の最大値

方針

(1) は，3 枚が同じ数となる数の選び方を考えて，次に残り $k-3$ 枚が異なる数となる選び方を考えます．(3) は確率の最大値を求めるため $f(k)$ と 1 の大小関係を考えます．

♣ ♠

解答

(1)　k 枚の取り出し方は，${}_{40}\mathrm{C}_k$（通り）である．3 枚のカードが同じ数なので，そのカードの選び方は，

$$10 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 40 \text{（通り）}$$

である．また，残り $k-3$ 枚は互いに異なる数となるので，その選び方は，

$${}_9\mathrm{C}_{k-3} \times ({}_4\mathrm{C}_1)^{k-3} = 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3} \text{（通り）}$$

ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{p(k) = \frac{40 \cdot 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}} \cdots\cdots \text{（答）}$$

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned}
f(k) &= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-4}}{{}_{40}\mathrm{C}_{k-1}} \cdot \frac{{}_{40}\mathrm{C}_k}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3}} \\
&= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot \dfrac{9!}{(k-4)!(13-k)!}}{\dfrac{40!}{(k-1)!(41-k)!}} \cdot \frac{\dfrac{40!}{k!(40-k)!}}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot \dfrac{9!}{(k-3)!(12-k)!}} \\
&= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot 9!(k-1)!(41-k)!}{40!(k-4)!(13-k)!} \cdot \frac{40!(k-3)!(12-k)!}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot 9!k!(40-k)!} \\
&= \boldsymbol{\frac{(k-3)(41-k)}{4k(13-k)}} \cdots\cdots \text{（答）}
\end{aligned}$$

(3)　$f(k)<1$ のときを考える．(2) より，

$$\frac{(k-3)(41-k)}{4k(13-k)} < 1 \iff (k-3)(41-k) < 4k(13-k) \quad (\because \ k(13-k)>0)$$

整理すると，

$$3k^2-8k-123<0$$

となる．ここで，$g(k)=3k^2-8k-123$ とおくと，

$$g(k) = 3\left(k-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{385}{3}$$

であるから，$4 \leqq k \leqq 12$ では $g(k)$ のグラフは単調増加である．

$$g(7) = 3 \cdot 49 - 56 - 123 = -32 < 0$$
$$g(8) = 3 \cdot 64 - 64 - 123 = 5 > 0$$

より，

$4 \leqq k \leqq 7$ のとき，　$p(k-1) < p(k)$

$8 \leqq k \leqq 12$ のとき，　$p(k-1) > p(k)$

である．したがって，

$$p(3) < p(4) < \cdots\cdots < p(6) < p(7) > p(8) > \cdots\cdots > p(12)$$

となり，$k = 7$ のとき $p(k)$ は最大となる．ゆえに，求める k の値は，

$\boldsymbol{k = 7}$……(**答**)

◇　♡

解説

確率の最大値・最小値は，頻出の問題です．誘導してくれている場合もありますが，誘導なしでも自分で求められるようになっていなければいけません．

P_k が階乗を含む式になるときは，このままでは P_k の最大値が求められません．そこで，次のように考えて最大となる k を決定します．

$$P_{k+1} < P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \quad \cdots\cdots①$$
$$P_{k+1} = P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} = 1 \quad \cdots\cdots②$$
$$P_{k+1} > P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad \cdots\cdots③$$

このように，$\frac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べることで，P_{k+1} と P_k の大小関係がわかるのです．しかも $\frac{P_{k+1}}{P_k}$ のように分数計算にすることで，階乗が消えるというメリットもあります．あとは，①, ②, ③ をみたす自然数 k の値を求めて，それに基づいて

$$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l > P_{l+1} > \cdots\cdots$$

となるような l を求めれば，$k = l$ のとき，P_k は最大になるというわけです．

✎**注**：$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l = P_{l+1} > P_{l+2} > \cdots\cdots$ のように最大となる k が 2 つ存在することもあります．

本問では，k についての 2 次方程式が出てきましたが，解の公式を使うタイプで計算がやや煩雑になるので，グラフを利用しました．k は自然数なので，$g(k) < 0$, $g(k+1) > 0$ となる自然数 k を見つければよいのです．

曲線 $C : y = \dfrac{2x-2}{x-4}$ と直線 $\ell : y = -x-1$ の交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ．

（1） 曲線 C の漸近線の方程式および α, β の値を求めよ．

（2） 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

（3） 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \beta \\ y \leqq \dfrac{2x-2}{x-4} \\ y \geqq -x-1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

曲線 $C : y = \dfrac{2x-2}{x-4}$ と直線 $\ell : y = -x-1$ の交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ．

（1） 曲線 C の漸近線の方程式および α, β の値を求めよ．

（2） 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

（3） 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \beta \\ y \leqq \dfrac{2x-2}{x-4} \\ y \geqq -x-1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) では，分数式の漸化式は $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ の形に変形します．(2) は，グラフをかいて公式通り計算します．(3) は，図形が回転軸を含んでいるので，対称移動させて考えます．

♣ ♠

解答

（1） $y = \dfrac{2x-2}{x-4} = \dfrac{2(x-4)+6}{x-4} = \dfrac{6}{x-4} + 2$ である．よって，曲線 C の漸近線の方程式は，

$\boldsymbol{x = 4,\ y = 2}$……（答）

である．また，C と ℓ の交点の x 座標は，

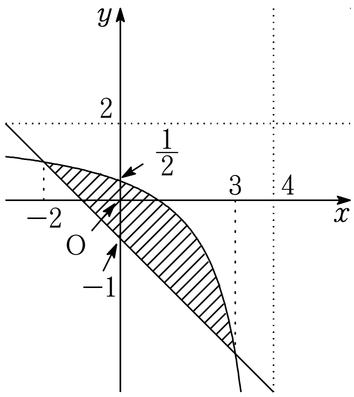
$$\frac{2x-2}{x-4} = -x-1 \iff 2x-2 = (-x-1)(x-4)$$
$$\iff (x-3)(x+2) = 0$$

よって，$\boldsymbol{\alpha = -2,\ \beta = 3}$……（答）

（2） (1) より，C と ℓ のグラフは右のようになる．

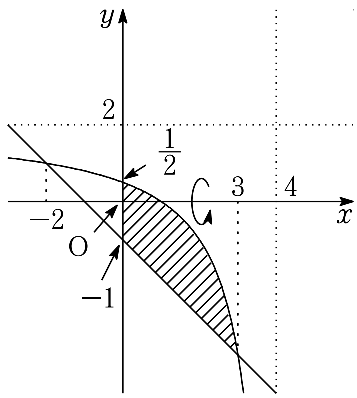
ゆえに，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{3} \left\{ \frac{2x-2}{x-4} - (-x-1) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^{3} \left(\frac{2x-2}{x-4} + x + 1 \right) dx \\ &= \int_{-2}^{3} \left(\frac{6}{x-4} + x + 3 \right) dx \\ &= \left[6\log|x-4| + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^{3} \\ &= \left(\frac{9}{2} + 9 \right) - (6\log 6 + 2 - 6) \\ &= \boldsymbol{\frac{35}{2} - 6\log 6} \text{……（答）} \end{aligned}$$



（3） 領域 D を図示すると右のようになる．

$y=-x-1$ のグラフの x 軸より下方部分を x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は $y=x+1$ であり，$x>0$ において $x+1>\dfrac{2x-2}{x-4}$ となるので，求める体積を V とすると，



$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^3(-x-1)^2\,dx-\pi\int_1^3\left(\frac{2x-2}{x-4}\right)^2dx\\
&=\pi\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_0^3-\pi\int_1^3\left(\frac{6}{x-4}+2\right)^2dx\\
&=\frac{4^3-1^3}{3}\pi-\pi\int_1^3\left\{\frac{36}{(x-4)^2}+\frac{24}{x-4}+4\right\}dx\\
&=21\pi-\pi\left[-\frac{36}{x-4}+24\log|x-4|+4x\right]_1^3\\
&=21\pi-\pi(36+12-12-24\log 3-4)\\
&=\boldsymbol{(24\log 3-11)\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

$y=\dfrac{a}{x-p}+q$ をした分数関数のグラフでの漸近線は，$x=p$, $y=q$ です．ちなみに，関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}$$

を満たす実数 a, b が存在するとき，漸近線 $y=ax+b$ が存在します．

（3）では，領域が回転軸を含んでいるので，図形を回転軸の片方に対称移動させたとき，上下関係を調べる必要があります．そのため本問では，$y=x+1$ と $y=\dfrac{2x-2}{x-4}$ の大小を比較しています．何も調べずに単に計算だけをしていると減点は避けられません．

整数 p, q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0! = 1$ とする．

（1） n, k が 0 以上の整数のとき，

$${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$$

を計算し，n によらない値になることを示せ．

（2） m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ．

整数 $p,\ q\ (p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0! = 1$ とする．

（1） $n,\ k$ が 0 以上の整数のとき，

$$_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$$

を計算し，n によらない値になることを示せ．

（2） m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ．

【テーマ】：二項係数と和

方針

(1) は，二項係数の定義にしたがって計算します．(2) では (1) の結果を用います．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$$_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} = \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!}$$

$$_{n+k}\mathrm{C}_k = \frac{(n+k)!}{k!n!}$$

$$_{n+k+1}\mathrm{C}_k = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \times \left(\frac{k!n!}{(n+k)!} - \frac{k!(n+1)!}{(n+k+1)!} \right)\\ &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \times k!n! \left(\frac{1}{(n+k)!} - \frac{n+1}{(n+k+1)!} \right)\\ &= \frac{(n+k+1)!}{k+1} \times \frac{n+k+1-(n+1)}{(n+k+1)!}\\ &= \frac{k}{k+1}\end{aligned}$$

ゆえに，n によらない値になることが示された． **（証明終）**

（2） (1) の結果より，

$$\frac{1}{_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{_{n+k+1}\mathrm{C}_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}}$$

が成り立つ．この式において，$k = 2$ とすると，

$$\frac{1}{_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_3} \iff \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_2} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{_m\mathrm{C}_3} &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_3}\\ &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_{n+3}\mathrm{C}_2} \right)\\ &= \frac{3}{2}\left\{ \left(\frac{1}{_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_3\mathrm{C}_2} \right) + \left(\frac{1}{_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_4\mathrm{C}_2} \right) + \cdots\cdots \right.\\ &\qquad \left. \cdots\cdots + \left(\frac{1}{_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{_m\mathrm{C}_2} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{m(m-1)}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}} \cdots\cdots (\text{答})$$

解説

階乗の計算に慣れていないと計算間違いをするかもしれません．二項係数に関する問題は，難関大学ではよく出題されます．組合せを表す ${}_n\mathrm{C}_r$ と和が出てきたら，二項定理を利用して計算するということも知っておきましょう．

【二項定理】

$(a+b)^n$ の展開公式は，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$

である．ここで，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である．ただし，$0! = 1$ と定義する．

k を正の実数とする．座標平面において，2 つの曲線 $y = k\tan x$ と $y = \cos x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分をそれぞれ C_1 と C_2 とする．C_1 と C_2 の交点を P とし，その x 座標を α とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\alpha$ を k を用いて表せ．

(2)　点 P における C_1 の接線と x 軸との交点を Q とする．次の (i), (ii) に答えよ．

(i)　点 Q の x 座標を α を用いて表せ．

(ii)　点 $\mathrm{R}(\alpha, 0)$ をとり，三角形 PQR の面積を S とおく．$k \to 0$ のときの $\dfrac{S}{k}$ の極限値を求めよ．

k を正の実数とする．座標平面において，2 つの曲線 $y=k\tan x$ と $y=\cos x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分をそれぞれ C_1 と C_2 とする．C_1 と C_2 の交点を P とし，その x 座標を α とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\alpha$ を k を用いて表せ．

(2)　点 P における C_1 の接線と x 軸との交点を Q とする．次の (i), (ii) に答えよ．

(i)　点 Q の x 座標を α を用いて表せ．

(ii)　点 $\mathrm{R}(\alpha, 0)$ をとり，三角形 PQR の面積を S とおく．$k \to 0$ のときの $\dfrac{S}{k}$ の極限値を求めよ．

【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，2 曲線を連立させて $\sin\alpha$ に関する 2 次方程式を解きます．(2) は，(1) の結果を用いて丁寧に計算しましょう．

♣　♠

解答

(1)　題意より，$k\tan\alpha=\cos\alpha$ が成り立つので，

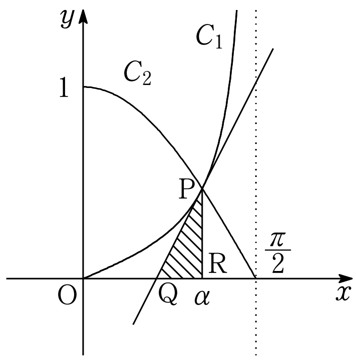
$$k\sin\alpha=\cos^2\alpha \iff k\sin\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha+k\sin\alpha-1=0$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ である．よって，

$$\boldsymbol{\sin\alpha=\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$



(2) (i)　$y'=\dfrac{k}{\cos^2 x}$ より，点 P における接線の方程式は，

$$y=\frac{k}{\cos^2\alpha}(x-\alpha)+k\tan\alpha$$

$$\therefore\ y=\frac{k}{\cos^2\alpha}x-\frac{k\alpha}{\cos^2\alpha}+k\tan\alpha$$

x 軸との交点は，$y=0$ として，

$$\frac{k}{\cos^2\alpha}x=\frac{k\alpha}{\cos^2\alpha}-k\tan\alpha$$

$$x=\alpha-\tan\alpha\cos^2\alpha$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\cdots\cdots(\text{答})$$

(ii)　$\mathrm{RQ}=\sin\alpha\cos\alpha$，$\mathrm{PR}=\cos\alpha$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha \iff S=\frac{1}{2}k\sin^2\alpha\quad(\because\ k\sin\alpha=\cos^2\alpha)$$

$$\iff \frac{S}{k}=\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$k\to 0$ のとき，(1) の結果から $\sin\alpha\to 1$ であるから，

$$\lim_{k\to 0}\frac{S}{k}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，交点を求める問題ですが，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の区間で交点がただ 1 つしかないことは証明できますか？図を用いれば確かにそうなっていますが，計算でこれを証明できるようになっておく必要があります．

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$y = k\tan x$ は $k > 0$ なので，単調増加であり，$y = \cos x$ は単調減少であることがわかります．ただし，これだけでは証明できたことになりません．そこで，$h(x) = k\tan x - \cos x$ という関数を作ります．$y = k\tan x$ が単調増加で $y = \cos x$ が単調減少なので，$h(x)$ は単調増加関数となります．したがって，

$$h(0) = -1,\quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} h(x) = +\infty$$

であることと，関数 $h(x)$ が連続関数であることから中間値の定理より $h(x) = 0$ は $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ でただ 1 つの実数解をもつことが示されます．ここで注意したいのは，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は計算できません．それは $\tan x$ が $\dfrac{\pi}{2}$ で定義されないからです．そのためこのような場合は極限を計算する必要があります．

実数 x に対して，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$\left[\,\dfrac{3}{2}\,\right]=1$, $[\,2\,]=2$ である．このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

（1） 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

（2） 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

（3） 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

実数 x に対して，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$\left[\,\dfrac{3}{2}\,\right]=1,\,[\,2\,]=2$ である．このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

(1) 不等式 $\log_2\left[\,\dfrac{5}{2}+\cos\theta\,\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) 不等式 $\left[\,\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\,\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(3) 不等式 $\log_2\left[\,\dfrac{5}{2}+\cos\theta\,\right]\leqq\left[\,\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\,\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と三角不等式

方針

ガウス記号の定義から $[\,x\,]\leqq x<[\,x\,]+1$ が成り立つので，これを用います．

解答

(1) $\log_2\left[\,\dfrac{5}{2}+\cos\theta\,\right]\leqq 1$ より，$\left[\,\dfrac{5}{2}+\cos\theta\,\right]\leqq 2$ であり，$-1<\cos\theta<1$ であるから，

$$\frac{3}{2}<\frac{5}{2}+\cos\theta<\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\ Ⓐ$$

である．したがって，

$$\left[\,\frac{5}{2}+\cos\theta\,\right]=1\ \text{または}\ \left[\,\frac{5}{2}+\cos\theta\,\right]=2$$

のいずれかである．

$$\left[\,\frac{5}{2}+\cos\theta\,\right]=1\iff 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2$$
$$\iff -\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\frac{1}{2}$$

よって，$-1<\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ であるから，$\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi\ \cdots\cdots$ ①

また，

$$\left[\,\frac{5}{2}+\cos\theta\,\right]=2\iff 2\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$
$$\iff -\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$$

よって，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ であるから，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi\ \cdots\cdots$ ②

①, ② より，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi}$……(**答**)

(2) $0<\sin\theta\leqq 1$ より，$\log_2\sin\theta\leqq 0$ である．よって，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\ Ⓑ$$

である．$\left[\,\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\,\right]\geqq 1$ となるのは，

$$1\leqq\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}$$

のときである．

$$-\frac{1}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$$

ゆえに，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi}$……**(答)**

(3)　Ⓐ より，$1 \leqq \left[\ \dfrac{5}{2} + \cos\theta\ \right] \leqq 3$ であるから，

$$0 \leqq \log_2\left[\ \frac{5}{2} + \cos\theta\ \right] \leqq \log_2 3$$

である．また，Ⓑ より，$\left[\ \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\ \right] \leqq 1$ であるから，$\left[\ \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\ \right]$ のとる値は 0 または 1 である．

(i)　$\left[\ \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\ \right] = 0$ のとき，すなわち

$$0 \leqq \frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta < 1 \iff -\frac{3}{2} \log_2 \sin\theta < -\frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \alpha \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \ \frac{3}{4}\pi < \theta \leqq \pi - \alpha \cdots\cdots ③$$

のとき，$\log_2\left[\ \dfrac{5}{2} + \cos\theta\ \right] = 0$ より，$\left[\ \dfrac{5}{2} + \cos\theta\ \right] = 1$ であるから，

$$1 \leqq \frac{5}{2} + \cos\theta < 2 \iff -\frac{3}{2} \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -1 \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

すなわち $\dfrac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi$ となるので，③ と合わせて，$\dfrac{3}{4}\pi < \theta \leqq \pi - \alpha$

(ii)　$\left[\ \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\ \right] = 1$ のとき，すなわち

$$1 \leqq \frac{3}{2} + \log_2 \sin\theta < 2$$

であり，これは (2) より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ …… ④ である．このとき，

$$\log_2\left[\ \frac{5}{2} + \cos\theta\ \right] = 1 \iff \left[\ \frac{5}{2} + \cos\theta\ \right] = 2$$

$$2 \leqq \frac{5}{2} + \cos\theta < 3 \iff -\frac{1}{2} \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

となるので，④ と合わせて，$\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$

(i), (ii) より，求める θ の範囲は，

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \pi - \alpha}$……**(答)**

◇　♡

解説

ガウス記号は整数の値しかとらないので，それをもとに値を絞っていきます．対数は飾りのようなもので本質的には三角不等式の問題です．(3) は (1), (2) の結果が利用できます．問題全体を通して小問がどのように関連付いているかを見極めましょう．

$a,\, m$ は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\, m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\, 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．

$a,\, m$ は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\, m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\, 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．

【テーマ】：格子点と数列の極限

方針

まず，放物線の方程式を求めます．$x=j$ 上の格子点の個数はガウス記号を用いて表します．

♣ ♠

解答

放物線の方程式を

$$y=kx(x-2a)$$

とおくと，これが点 $(a,\, m)$ を通るので，

$$m=ka(-a) \iff k=-\frac{m}{a^2}$$

よって，放物線の方程式は，

$$y=-\frac{m}{a^2}x(x-2a)$$

である．$x=j$ $(j=0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, 2a)$ 上の格子点の個数 $N(j)$ は，

$$N(j)=\left[-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right]+1$$

である．ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．ここで，一般に実数 x に対して，

$$x-1<[\,x\,]\leqq x \iff x<[\,x\,]+1\leqq x+1$$

が成り立つので，

$$-\frac{m}{a^2}j(j-2a)<\left[-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right]+1\leqq-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1$$

$$-\frac{m}{a^2}j(j-2a)<N(j)\leqq-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1$$

が成り立つので，$j=0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, 2a$ として辺々加えると，

$$\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}<\sum_{j=0}^{2a}N(j)\leqq\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1\right\}$$

$$\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}<L_m\leqq\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1\right\}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}&=\frac{m}{a^2}\left\{2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a(2a+1)-\frac{1}{6}\cdot 2a(2a+1)(4a+1)\right\}\\&=\frac{m}{a^2}\left\{2a^2(2a+1)-\frac{1}{3}a(2a+1)(4a+1)\right\}\\&=\frac{m}{3a}(2a+1)\{6a-(4a+1)\}\\&=\frac{m(4a^2-1)}{3a}\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a} < L_m \leqq \frac{m(4a^2-1)}{3a} + 2a + 1 \cdots\cdots ①$$

となる.

一方,放物線 $y = -\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_m は,

$$\begin{aligned} S_m &= \int_0^{2a} \left\{ -\frac{m}{a^2}x(x-2a) \right\} dx \\ &= \frac{m}{6a^2}(2a)^3 \\ &= \frac{4ma}{3} \end{aligned}$$

であるから,① の各辺を $S_m > 0$ で割ると,

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a} \cdot \frac{3}{4ma} < \frac{L_m}{S_m} \leqq \frac{m(4a^2-1)}{3a} \cdot \frac{3}{4ma} + (2a+1) \cdot \frac{3}{4ma}$$

$$\frac{4a^2-1}{4a^2} < \frac{L_m}{S_m} \leqq \frac{4a^2-1}{4a^2} + \frac{3(2a+1)}{4am}$$

$m \to \infty$ のとき,$\dfrac{3(2a+1)}{4am} \to 0$ であるから,はさみうちの原理より,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{L_m}{S_m} = \boldsymbol{\frac{4a^2-1}{4a^2}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

放物線の方程式を誤って,$y = -x(x-2a)$ などとしないように注意しましょう.これでは点 (a, m) を通るという条件を無視していることになります.さて,放物線の方程式を正しく求めると,$y = -\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ となるので,これでは,j を整数として $x = j$ のとき,y の値が整数になるとは限りません.格子点は x, y がともに整数でなければならないので,ガウス記号 $[\,x\,]$ を用いて整数を表現することになります.本問のポイントは,ここにあります.L_m を正しく求める必要はありませんし,求められません.要するに極限値が欲しいわけですから,不等式を作ってはさみうちの原理に持ち込むのです.解答中にも書きましたが,実数 x に対して,$x-1 < [\,x\,] \leqq x$ が成り立ちます.ガウス記号と極限の問題ではこの不等式が必須です.必ず理解して使えるようにしておきましょう.

$a,\ b,\ c$ を正の定数とする．$ax+by+cz=1$ を満たす実数 $x,\ y,\ z$ のうち，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b},\ \dfrac{z}{c}\right\}$ を最大にするような $x,\ y,\ z$ とその最大値を求めよ．ただし，$\min\{p,\ q,\ r\}$ は $p,\ q,\ r$ のうちの最小の値を表す．

a, b, c を正の定数とする．$ax+by+cz=1$ を満たす実数 x, y, z のうち，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b},\ \dfrac{z}{c}\right\}$ を最大にするような x, y, z とその最大値を求めよ．ただし，$\min\{p, q, r\}$ は p, q, r のうちの最小の値を表す．

【テーマ】：不等式の証明

方針

$\min\{p, q, r\}$ は p, q, r の最小値を表す関数です．最小値を k と置いて考えます．

♣ ♠

解答

$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}, \dfrac{z}{c}$ の中で最も小さいものを k とおく．すなわち

$$\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right\}=k$$

とおくと，

$$\frac{x}{a} \geqq k, \quad \frac{y}{b} \geqq k, \quad \frac{z}{c} \geqq k$$

である．$a^2>0, b^2>0, c^2>0$ であることから，

$$ax+by+cz=a^2\cdot\frac{x}{a}+b^2\cdot\frac{y}{b}+c^2\cdot\frac{z}{c} \geqq a^2k+b^2k+c^2k$$

が成り立ち，$ax+by+cz=1$ であるから，

$$1 \geqq (a^2+b^2+c^2)k \iff k \leqq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \quad (\because \ a^2+b^2+c^2>0)$$

である．等号は，$ax+by+cz=1$ かつ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ のとき成り立つので，

$$\boldsymbol{x=\frac{a}{a^2+b^2+c^2},\quad y=\frac{b}{a^2+b^2+c^2},\quad z=\frac{c}{a^2+b^2+c^2}} \cdots\cdots\text{(答)}$$

のとき成立し，$\min\left\{\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}, \dfrac{z}{c}\right\}$ の最大値すなわち k の最大値は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}} \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

♢ ♡

解説

$\min\{p, q, r\}$ の処理の仕方が問題です．最小値を k と置いてしまえば不等式が作れるので，後は与えられた条件式 $ax+by+cz=1$ をどのように変形するかがポイントとなります．解答を見ればそんなに難しく感じないかもしれませんが，方針を立てるのが難しい問題でしょう．

等号成立の x, y, z の値は，$x=ak, y=bk, z=ck$ であることと，等号が成り立つときは，$k=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$ であることから求められます．

（1） 整数 m, n に対して，積分 $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ．

（2） 自然数 n に対して，積分 $J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ．

(1)　整数 m,n に対して，積分 $I_{m,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ.

(2)　自然数 n に対して，積分 $J_n=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2 dx$ を求めよ.

【テーマ】：定積分

方針

(1) は m,n の値が等しいか 0 かで場合分けが必要になります.(2) は (1) の結果を利用して式を簡単にしましょう.

♣ ♠

解答

(1)

(i)　$m=\pm n\fallingdotseq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\,x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\,\right]_0^{2\pi}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi
\end{aligned}
$$

(ii)　$m\fallingdotseq\pm n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\,\right]_0^{2\pi}\\
&=0
\end{aligned}
$$

(iii)　$m=n=0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=\int_0^{2\pi}dx\\
&=2\pi
\end{aligned}
$$

以上より，求める定積分の値は,

$$
\boldsymbol{I_{m,n}=\begin{cases}\pi & (m=\pm n\fallingdotseq 0)\\ 0 & (m\fallingdotseq\pm n)\\ 2\pi & (m=n=0)\end{cases}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})
$$

(2)　(1), (ii) の結果を用いると,

$$
\begin{aligned}
J_n&=\int_0^{2\pi}\left(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{3}\cos 3x+\cdots\cdots+\sqrt{n}\cos nx\right)^2\,dx\\
&=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x+2\cos^2 2x+3\cos^2 3x+\cdots\cdots+n\cos^2 nx\right)\,dx
\end{aligned}
$$

と変形できる．ここで，(1), (i) の結果より，$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi$ であるから,

$$J_n = \pi + 2\pi + 3\pi + \cdots\cdots + n\pi = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は m, n の値が 0 かどうか，また等しいかどうかなど様々な場合分けが必要なので，注意が必要です．

(2) は，経験がなければ難しいかもしれませんが，(1) がヒントになっていることには気付きたいものです．被積分関数をまともに計算すると大変ですから，(1), (ii) が威力を発揮します．$\cos mx \cos nx$ で $m \neq n$ であれば定積分の値が 0 になるというものなので，$\left(\cos x + \sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{3}\cos 3x \cdots\cdots + \sqrt{n}\cos nx\right)^2$ を展開したとき，残ってくるのは 2 乗の項だけであるということに気付きましょう．

A, B, C を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

（1）　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)$

（2）　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$

（3）　$\sin A+\sin B+\sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$

（4）　三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすると，$R \geqq 2r$ であり，等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

A, B, C を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

（1）　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \leqq \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)$

（2）　$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}$

（3）　$\sin A+\sin B+\sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$

（4）　三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすると，$R \geqq 2r$ であり，等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

【テーマ】：三角不等式の証明

方針

前問の結果を用いて示します．A, B, C は三角形の内角なので，$A+B+C=\pi$ が成り立ちます．

解答

（1）**【証明】**

題意より，$A+B+C=\pi$ ……① が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{c}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号は，$A=B$ のとき成立する．よって，示された．　**（証明終）**

（2）**【証明】**

$\sin\frac{C}{2}>0$ より，(1) で示した不等式の両辺に $\sin\frac{C}{2}>0$ をかけて，

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &\leqq \frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\\
&\leqq \frac{1}{8}\quad\left(\because\ \ 0<\sin\frac{C}{2}\leqq 1\right)
\end{aligned}
$$

等号は，(1) の等号成立条件である $A=B$ と $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ すなわち $C=\frac{\pi}{3}$ を同時に満たす A, B, C すなわち

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

のとき成立する．よって，示された．　**（証明終）**

(3) **【証明】**

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\sin\{\pi-(B+C)\}+\sin B+\sin C\\&=\sin(B+C)+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&=2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\pi-A}{2}\times2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

と変形できる．(2) より，$1\geqq 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&\geqq 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=4\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

等号は，(2) より，$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，成立する．よって，示された．　**(証明終)**

(4) **【証明】**

正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

であるから，面積を考えて，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

$$\frac{1}{2}\cdot2R\sin C\cdot2R\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}r\cdot2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$2R^2\sin A\sin B\sin C=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$2R\sin A\sin B\sin C=r(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\therefore\quad\frac{2R}{r}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqq4\quad(\because\ (3))$$

よって，$R\geqq 2r$ を得る．等号は，(3) より $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき成立するので，正三角形のときである．よって，示された．　**(証明終)**

◇　♡

解説

A, B, C が三角形の内角であることから，$A+B+C=\pi$ であることを利用することに気付かなければいけません．三角関数で扱う公式『和積の公式』の利用がポイントとなります．『和積の公式』は覚えていなくても構いませんが，加法定理を足したり引いたりすれば導けるので，自力で導けるようにはしておきましょう．

【和積の公式・積和の公式】

$$\begin{cases}\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\\\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}\\\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\\\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\\\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\end{cases}$$

xy 平面上に曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$C:\ x=f(\theta)=\cos^3\theta,\quad y=g(\theta)=-\sin^3\theta\quad (0<\theta<\pi)$$

で与えられている．C 上の点 $\mathrm{P}_1(f(\theta_1),\,g(\theta_1))$ における C の接線 ℓ_1 と点 $\mathrm{P}_2(f(\theta_2),\,g(\theta_2))$ における C の接線 ℓ_2 とが直交しているとする．ただし，$\theta_1<\theta_2$ とする．

（1） θ_2 を θ_1 で表せ．

（2） ℓ_1 と ℓ_2 の交点を $\mathrm{Q}(X,\,Y)$ とする．P_1 が C 上を動くとき $X+Y$ の最小値を求めよ．

xy 平面上に曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$C:\ x=f(\theta)=\cos^3\theta,\quad y=g(\theta)=-\sin^3\theta \quad (0<\theta<\pi)$$

で与えられている．C 上の点 $\mathrm{P}_1(f(\theta_1),\, g(\theta_1))$ における C の接線 ℓ_1 と点 $\mathrm{P}_2(f(\theta_2),\, g(\theta_2))$ における C の接線 ℓ_2 とが直交しているとする．ただし，$\theta_1<\theta_2$ とする．

(1) θ_2 を θ_1 で表せ.

(2) ℓ_1 と ℓ_2 の交点を $\mathrm{Q}(X,\, Y)$ とする．P_1 が C 上を動くとき $X+Y$ の最小値を求めよ.

【テーマ】：媒介変数表示された曲線

方針

(1) は，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ であることを用いて，接線の傾きを求めます．(2) は，$X+Y$ を θ_1 の関数で表しましょう．

♣ ♠

解答

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-3\sin^2\theta\cos\theta$ より C 上の点 P_1 における接線の傾きは,

$$\frac{-3\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{-3\cos^2\theta_1\sin\theta_1}=\tan\theta_1$$

で，点 P_2 における接線の傾きも同様にすると，$\tan\theta_2$ となる.

ℓ_1 と ℓ_2 が直交するので,

$$\tan\theta_1\tan\theta_2=-1 \iff \frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=-1$$

$$\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2=0$$

$$\cos(\theta_2-\theta_1)=0$$

$0<\theta_1<\theta_2<\pi$ より，$\theta_2-\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ となるので,

$$\boldsymbol{\theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) ℓ_1 の方程式は,

$$y=\tan\theta_1(x-\cos^3\theta_1)-\sin^3\theta_1$$

$$\therefore\quad y=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}x-\sin\theta_1 \cdots\cdots ①$$

同様にして，ℓ_2 の方程式は,

$$y=\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}x-\sin\theta_2$$

であり，(1) の結果から,

$$y=\frac{\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}x-\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}x-\cos\theta_1 \cdots\cdots ②$$

①, ② の交点が $\mathrm{Q}(X,\,Y)$ であるから,

$$Y=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}X-\sin\theta_1$$
$$Y=-\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}X-\cos\theta_1$$

を満たすので，これを解いて,

$$X=\cos\theta_1\sin\theta_1(\sin\theta_1-\cos\theta_1)$$
$$Y=-\cos\theta_1\sin\theta_1(\sin\theta_1+\cos\theta_1)$$

したがって,

$$\begin{aligned}X+Y&=-2\cos^2\theta_1\sin\theta_1\\&=-2(1-\sin^2\theta_1)\sin\theta_1\end{aligned}$$

となる．ここで，$\sin\theta_1=t$ とおき，$X+Y=f(t)$ とすると,

$$f(t)=-2(1-t^2)t=2t^3-2t\quad(0<t<1)$$

となる．

$f'(t)=6t^2-2$ より，$f'(t)=0$ のとき，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから,

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$f(t)$ は最小値をとる．

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

より，求める最小値は，$\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$……**(答)**

◇ ♡

解説

曲線が媒介変数で表されていますので，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ を用いて接線の傾きを求めます．その後は，三角関数の問題となるので，加法定理を用いて θ_1 と θ_2 の関係を求めています．(2) は，交点の座標を素直に計算しましょう．結果的に $X+Y$ は θ_1 の関数として見なせるので，置き換えをすれば 3 次関数に帰着させられます．$X+Y$ を θ_1 の関数とみなして微分しても構いませんが，$\sin\theta_1$ に関しての 3 次関数になるので，置き換えをした方が計算が楽になるでしょう．

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．

(1) すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2}{3}k\,\right]$ $(k=1,\,2,\,\cdots\cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．

（1）　すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

（2）　数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2}{3}k\,\right]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と数列

方針

(1) は，実数は整数部分と小数部分に分けて考えることができるので，$a=n+\alpha$ (n を整数，$0 \leqq \alpha < 1$) と置いて考えます．(2) は，k を 3 で割った余りで場合分けしましょう．

解答

（1）**【証明】**

$a=n+\alpha$ (n を整数，$0 \leqq \alpha < 1$) とおくと，

$$[\,a+m\,]=[\,n+\alpha+m\,]=[\,(n+m)+\alpha\,]$$

となる．$n+m$ は整数で α は $0 \leqq \alpha < 1$ を満たすので，

$$[\,(n+m)+\alpha\,]=n+m$$

が成り立つ．ゆえに，

$$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$$

が示された．　**（証明終）**

（2）　j を自然数とするとき，

$$a_{3j}=[\,2j\,]=2j,\quad a_{3j-1}=\left[\,2j-\frac{2}{3}\,\right]=2j-1,\quad a_{3j-2}=\left[\,2j-\frac{4}{3}\,\right]=2j-2$$

である．ゆえに，m を自然数とするとき，

(i)　$n=3m$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})\\ &= \sum_{j=1}^{m}(6j-3)\\ &= 6\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-3m\\ &= 3m^2\\ &= \frac{n^2}{3}\end{aligned}$$

である．

(ii) $n=3m-1$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m-1} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})-a_{3m}\\ &=3m^2-2m\\ &=3\cdot\left(\frac{n+1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{3}\\ &=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

である．

(iii) $n=3m-2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m-2} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})-a_{3m}-a_{3m-1}\\ &=3m^2-2m-(2m-1)\\ &=3m^2-4m+1\\ &=3\cdot\left(\frac{n+2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{n+2}{3}+1\\ &=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

である．

ゆえに，(i)〜(iii) より，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\begin{cases}\dfrac{n^2}{3} & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき})\\[2mm] \dfrac{n^2-1}{3} & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき})\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，あたりまえだと感じるかもしれませんが，そのあたりまえのことが示せるかどうかが問われてます．一般に実数は，整数部分と小数部分に分けることができるので，解答のように，$a=n+\alpha$ とおいて議論を進めていきます．この問題では問題文にガウス記号に関する不等式が書かれていますが，これも証明できるようになっておきましょう．ちなみに証明は次のように行います．

$[\,x\,]$ を x を超えない最大の整数とするとき，$[\,x\,]=n$ とおき，α を $0\leqq\alpha<1$ を満たす実数とすると，

$$x=n+\alpha$$

と表せる．ここで，$\alpha=x-n$ となるので，$0\leqq\alpha<1$ へ代入して，

$$0\leqq x-n<1 \iff n\leqq x<n+1$$

であるから，$[\,x\,]\leqq x<[\,x\,]+1$ が示された．

(2) は，$\left[\,\dfrac{2}{3}k\,\right]$ という形から n を 3 で割った余りで場合分けする必要があることに気付きましょう．ちなみに，(1) の結果から $a_{k+3}=a_k+2$ という漸化式が成り立つことも分かります．

次の各問に答えなさい.

（1） 定積分

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi} \sin x \cos x\,dx$$

の値を求めなさい.

（2） 関数 $f(x)$ が与えられたとき，定積分

$$\int_0^{\pi} (f(x) - a\sin x - b\cos x)^2\,dx$$

の値を最小にするような実数 a, b の値を,

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \text{ および } \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$$

を用いて表しなさい.

（3） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} (x - a\sin x - b\cos x)^2\,dx$ の値を最小にするような実数 a, b の値を求めなさい.

次の各問に答えなさい．

(1)　定積分
$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$$
の値を求めなさい．

(2)　関数 $f(x)$ が与えられたとき，定積分
$$\int_0^{\pi} (f(x)-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$$
の値を最小にするような実数 $a,\,b$ の値を，
$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \text{ および } \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$$
を用いて表しなさい．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} (x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ の値を最小にするような実数 $a,\,b$ の値を求めなさい．

【テーマ】：定積分の最小値

方針

(1) は，半角の公式や 2 倍角の公式を用います．(2) は，$a,\,b$ に関する 2 変数関数の最小値問題ですから，$a,\,b$ に関して整理します．(3) は，(2) で $f(x)=x$ としたものです．

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \left[\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx &= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \left[\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx\\ &= \left[\ -\frac{1}{4}\cos 2x\ \right]_0^{\pi}\\ &= \mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2)　(1) より，$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx=0$ であるから，
$$(\text{与式})=\int_0^{\pi} \left[\ \{f(x)\}^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2af(x)\sin x-2bf(x)\cos x\ \right]\,dx$$
となり，さらに (1) より，$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}$ であるから，
$$(\text{与式})=\int_0^{\pi} \left[\ \{f(x)\}^2-2af(x)\sin x-2bf(x)\cos x\ \right]\,dx+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2$$
となる．ここで，$p=\displaystyle\int_0^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$，$q=\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx$，$r=\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ とおくと，$p,\,q,\,r$ は定数であるから，与式は次のような $a,\,b$ に関する関数になる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= p-2aq-2br+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2\\
&= \frac{\pi}{2}\left(a^2-\frac{4q}{\pi}a\right)+\frac{\pi}{2}\left(b^2-\frac{4r}{\pi}b\right)+p\\
&= \frac{\pi}{2}\left(a-\frac{2q}{\pi}\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(b-\frac{2r}{\pi}\right)^2-\frac{2}{\pi}q^2-\frac{2}{\pi}r^2+p
\end{aligned}
$$

ゆえに，$a=\frac{2}{\pi}q$ かつ $b=\frac{2}{\pi}r$ のとき，与えられた定積分の値は最小となるので，

$$\boldsymbol{a=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx,\quad b=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3)　(2) において $f(x)=x$ とすればよいので，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\Big[\,x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi+\Big[\,\sin x\Big]_0^{\pi}\right)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos x\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\Big[\,x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\,\cos x\Big]_0^{\pi}\\
&= \frac{2}{\pi}(-1-1)\\
&= -\frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

したがって，$\boldsymbol{a=2,\ b=-\frac{4}{\pi}}$……(**答**)

◇　♡

解説

(1) は，半角の公式と 2 倍角の公式を使う基本的な定積分の問題ですから絶対に落とせません．ここでのミスは (2) 以降に影響します．慎重に計算しましょう．

(2) は，何が変数で何が定数なのかをしっかりと判別できなければいけません．x で定積分するので積分後は x が定数に変わりますから，残る文字は a, b のみです．つまり，与えられた定積分は，a, b の 2 変数関数であることがわかります．一般に $\int_a^b f(x)\,dx$ は a, b が定数ならば定数になりますから，$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$ などを残したまま計算するよりも置き換えた方が式全体が簡単になるので，置き換えましょう．

(3) は，(2) の形から $f(x)=x$ であることは見抜けなければいけません．

本問は，(2) の出来具合が大きく得点差に影響するので，本番では差が付きやすい問題です．

(1) 自然数 x, y は，$1 < x < y$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす．x, y の組をすべて求めよ．

(2) 自然数 x, y, z は，$1 < x < y < z$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす．x, y, z の組をすべて求めよ．

(1)　自然数 x, y は，$1<x<y$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす．x, y の組をすべて求めよ．

(2)　自然数 x, y, z は，$1<x<y<z$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす．x, y, z の組をすべて求めよ．

【テーマ】：不定方程式

方針

与えられた方程式と x, y, z の大小関係から一番小さい文字 x のとり得る値の範囲を絞り込みます．

♣　♠

解答

(1)　$1<x<y$ より，$0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}<1$ であるから，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}}<1+\frac{1}{x} \iff 1<x<\frac{\sqrt{15}+3}{2}$$

となる．$3<\sqrt{15}<4$ より，$3<\dfrac{\sqrt{15}+3}{2}<\dfrac{7}{2}$ であるから，

$$x=2, 3$$

を得る．

(i)　$x=2$ のとき，与えられた方程式は，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3} \iff y=9$$

(ii)　$x=3$ のとき，与えられた方程式は，

$$\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3} \iff y=4$$

ゆえに，求める自然数 x, y の組は，

$$\boldsymbol{(x, y)=(2, 9), (3, 4)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

(2)　$1<x<y<z$ より，$0<\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}<1$ である．よって，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \iff \frac{12}{5}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \cdots\cdots ①$$

を得る．$x\geqq 3$ のとき，

$$\frac{12}{5} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \leqq \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{84}{27} = 2.37\cdots$$

となり，不成立であるから，$x=2$ のみが ① を満たす．このとき，与えられた方程式は，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \iff \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \cdots\cdots ②$$

である．したがって，$\frac{1}{z} < \frac{1}{y}$ より，

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) < \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \iff \frac{8}{5} < \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \cdots\cdots ③$$

$1<x<y$ であり，$x=2$ より，$y>2$ となる．同様にすると，③ を満たす 3 以上の自然数 y は，$y=3$ のみである．このとき，② から，

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \iff z=5$$

これは，$1<x<y<z$ を満たす．

ゆえに，求める自然数 $x,\, y,\, z$ の組は，

$\boldsymbol{(x,\, y,\, z) = (2,\, 3,\, 5)}$……(答)

である．

◇ ♡

解説

不定方程式の問題です．(1) は，等式を変形して (整数)×(整数)＝(整数) の形にしても解けますが，(2) では大変なので，$x,\, y,\, z$ の大小関係を用いて絞込みを行います．よくある手法なので，確実に理解して使えるようにしておきましょう．(1) の別解を以下に記しておきます．

別解

(1)　両辺に $3xy$ をかけると，

$$3(x+1)(y+1) = 5xy \iff 2xy - 3(x+y) = 3 \iff (2x-3)(2y-3) = 15$$

と変形できる．ここで，$1<x<y$ より，$-1<2x-3<2y-3$ であるから，かけて 15 となる組合せは，

$(2x-3,\, 2y-3) = (1,\, 15),\, (3,\, 5) \iff \boldsymbol{(x,\, y) = (2,\, 9),\, (3,\, 4)}$……(答)

(2) では，x のとり得る値の範囲を求めるため，まず $x=2,\, 3,\, \cdots$ と代入してどこで等式を満たさなくなるかを実験します．そうすると $x=3$ で成立しないことが分かるので，$x \geqq 3$ で不成立であることを示しています．同様に，y についても実験すればすぐに $y=3$ のときだけが ③ の不等式を満たすことが分かるでしょう．

円 $C : x^2+y^2-2x=0$ 上の点 $(2, 0)$ における接線を l とする．原点 O と円 C 上の点 P（ただし，P $\fallingdotseq$ O とする）とを通る直線 OP と接線 l との交点を Q とする．線分 OQ 上に OR $=$ PQ となる点 R をとる．点 P が C 上 $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点 R の描く曲線を D とする．

（1） x 軸の正の部分と直線 OP のなす角を θ とおき，R の座標を (s, t) とするとき，s, t を θ を用いて表せ．

（2） t^2 を s を用いて表せ．

（3） 曲線 D と円 C との，原点以外の交点 (x_0, y_0) を求めよ．

（4） 曲線 D，直線 $x=x_0$，および x 軸で囲まれる図形を K とする．

（a） K を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

（b） K の面積を求めよ．

円 $C: x^2+y^2-2x=0$ 上の点 $(2, 0)$ における接線を l とする．原点 O と円 C 上の点 P（ただし，P $\fallingdotseq$ O とする）とを通る直線 OP と接線 l との交点を Q とする．線分 OQ 上に OR $=$ PQ となる点 R をとる．点 P が C 上 $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点 R の描く曲線を D とする．

（1） x 軸の正の部分と直線 OP のなす角を θ とおき，R の座標を (s, t) とするとき，s, t を θ を用いて表せ．

（2） t^2 を s を用いて表せ．

（3） 曲線 D と円 C との，原点以外の交点 (x_0, y_0) を求めよ．

（4） 曲線 D，直線 $x=x_0$，および x 軸で囲まれる図形を K とする．

（a） K を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

（b） K の面積を求めよ．

【テーマ】：面積と回転体の体積

方針

(1) は，三角比を用いると OP, OQ の長さが容易に計算できます．(2) は，(1) において θ を消去します．(3) は，交点を求めるので連立方程式を解きます．(4) は，前半は分母を置換し，後半は，(1) で求めた関係式を用いて置換します．

♣ ♠

解答

（1） A$(2, 0)$ とする．△OAP と △OAQ はともに直角三角形であり，∠POA $=\theta$ であるから，

$$\mathrm{OP}=2\cos\theta,\ \mathrm{OQ}=\frac{2}{\cos\theta}$$

が成り立つ．よって，

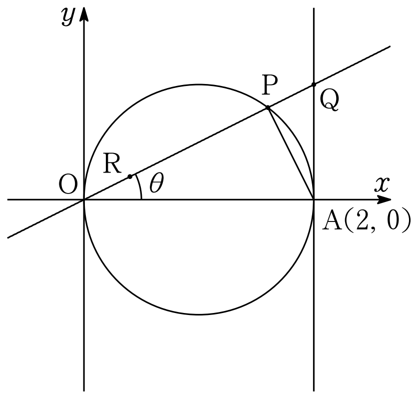
$$\mathrm{PQ}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta=2\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

となるので，$\mathrm{OR}=\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$ である．ここで，

$$s=\mathrm{OR}\cos\theta,\ t=\mathrm{OR}\sin\theta$$

と表せるので，

$$\boldsymbol{s=2\sin^2\theta,\ t=2\sin^2\theta\tan\theta}\cdots\cdots\text{(答)}$$



（2） (1) より，$t=s\tan\theta$ であるから，

$$\begin{aligned} t^2 &= s^2\tan^2\theta \\ &= s^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) \\ &= s^2\left(\frac{1}{1-\frac{s}{2}}-1\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{s^3}{2-s}}\cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

（3） ${y_0}^2=\dfrac{{x_0}^3}{2-x_0}$ と ${x_0}^2+{y_0}^2-2x_0=0$ より，

$$2x_0-{x_0}^2=\frac{{x_0}^3}{1-x_0}$$

$x_0 \fallingdotseq 0$ より，$x_0=1$ を得る．このとき，$y_0=1$ であるから，

$$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)

(a) 求める体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^1 t^2\,ds=\pi\int_0^1\frac{s^3}{2-s}\,ds$$

$x=2-s$ とおくと，$dx=-ds$ であるから，

s	$0\to1$
x	$2\to1$

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^2\frac{(2-x)^3}{x}\,dx\\&=\pi\int_1^2\left(\frac{8}{x}-12+6x-x^2\right)dx\\&=\boldsymbol{8\pi\left(\log 2-\frac{2}{3}\right)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(b) K 面積を S とすると，

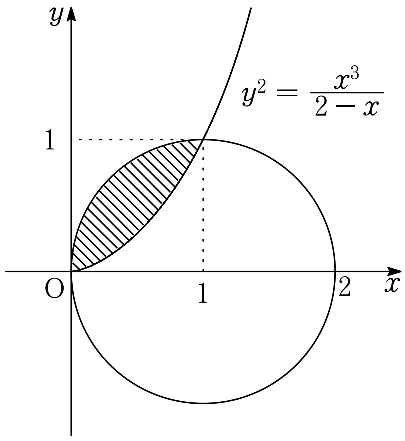
s	$0\to\ 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$S=\int_0^1 t\,ds$$

(1) より，$t=2\sin^2\theta\tan\theta$, $s=2\sin^2\theta$ より，

$ds=4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2\theta\tan\theta\cdot4\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}8\sin^4\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)^2\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)d\theta\\&=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi-2}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



◇ ♡

解説

(1) は，直線の方程式や 2 点間の距離を考えると計算が煩雑になるので三角比を利用して処理をしましょう．ちなみに，$s=1-\cos2\theta$，$t=(1-\cos2\theta)\tan\theta$ でも正解です．

(2) は，(1) で求めた式において θ を消去するだけなのですが，三角関数の様々な関係式を思い浮かべて消去する必要があります．解答では，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して θ を消去していますが，次の $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係式を使って消去すれば一発です．

$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

そんな関係式知らないよ！って人も結構いるのですが，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割れば導かれます．$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と導出方法が同じなので，知らなくても導くことはできるようにしておきましょう．

(3) は，連立方程式なので，y_0^2 を消去しましょう．

(4) は，体積と面積の計算ですが，体積の方は被積分関数が $\dfrac{s^3}{2-s}$ という形をしているので，分母が単項式になるような置換を考えます．面積は，$t=f(s)$ の形に直して積分するのは困難なので，(1) で求めている媒介変数表示されたものを利用します．

全体的にボリュームがあり，計算も大変ですが，様々な要素が詰まった良問なので，きちんと理解しておきましょう．

x の 3 次関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + 4k$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　$y = f(x)$ のグラフが k の値によらずに通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a < b)$ を求めよ．さらに，$a < x < b$ のときつねに $y = f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ．

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフが k の値によらずに通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ．さらに，$a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：微分法の不等式への応用

方針

(1) は，$x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ となるので，$x \geqq 0$ における最小値が 0 以上になるときを考えます．(2) は k についての恒等式を考えて定点を求めます．

解答

(1)　$f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$ である．ここで，$f(0)=4k$ であるから，$x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには，$k \geqq 0$ であることが必要である．

(i)　$k=0$ のとき，$x \geqq 0$ で $f'(x) \geqq 0$ となるので，$f(x)$ は単調増加である．よって，題意を満たす．

(ii)　$k>0$ のとき，$f'(x)=0$ を満たす x の値は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}k$ であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ゆえに，$x \geqq 0$ における最小値は

$$f\left(\frac{2}{3}k\right)=\frac{8}{27}k^3-\frac{4}{9}k^3+4k=-\frac{4}{27}k^3+4k$$

である．したがって，題意を満たすためには，$f\left(\dfrac{2}{3}k\right) \geqq 0$ であればよいので，

$$-\frac{4}{27}k^3+4k \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k(k^2-27) \leqq 0$$

$k>0$ であるから，$k^2-27 \leqq 0$ となるので，$0<k \leqq 3\sqrt{3}$ である．

(i), (ii) より，求める k の値の範囲は，

$\boldsymbol{0 \leqq k \leqq 3\sqrt{3}}$……(答)

である．

(2)　$y=x^3-kx^2+4k$ を k について整理すると，

$$(x^2-4)k+y-x^3=0$$

となる．k の値によらないので，k についての恒等式となるとき，

$$x^2-4=0 \text{ かつ } y-x^3=0$$

$$\therefore\ (x,\ y)=(2,\ 8),\ (-2,\ -8)$$

ゆえに，$a=-2, b=2$ であり，定点の座標は，A$(-2,\ -8)$, B$(2,\ 8)$ となる．

直線 AB の方程式は，$y=4x$ となるので題意より，$-2<x<2$ において

$$x^3-kx^2+4k>4x \iff x^3-kx^2-4x+4k>0$$

が成り立てばよい．すなわち，

$$g(x)=x^3-kx^2-4x+4k$$

とおくと，$-2<x<2$ において，常に $g(x)>0$ となればよい．

$$g(x)=(x^2-4)(x-k)$$

であり，$-2<x<2$ より，$x^2-4<0$ であるから，$-2<x<2$ で常に $x-k<0$ となればよい．
$y=x-k$ のグラフは単調増加なので，題意を満たすための条件は，

$$2-k<0 \iff \boldsymbol{k>2}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は，必要条件を求めていますが，$k<0, k=0, k>0$ と 3 通りに場合分けをして $k<0$ のときは不適としても構いません．基本的な問題なので，完答できるようにしておきましょう．

(2) は，まず定点を発見することから始めます．文字 k を含む関数のグラフが定点を通るかどうかを調べるためには，グラフの方程式をその文字 k についての恒等式と考えて解きます．$(x,\ y)$ の組が存在すればそれが定点の座標ですが，$(x,\ y)$ の組が存在しなければ，定点も存在しません．定点が求まれば，直線 AB の方程式が求められるので，$g(x)$ が作れます．解答にもあるように $-2<x<2$ で常に $g(x)>0$ であることを示すのですが，本問では因数分解によって，符号がわかる因数が存在したので比較的容易に k の値の範囲が求められました．もしも，因数分解ができなければ (1) と同様にして，$-2<x<2$ における最小値が常に正となるような k の値の範囲を求めればよいのです．もちろん，因数分解に気付かなくてもこの方法で解答できなければいけません．

$f(x) = e^{-x^2}$ とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ，原点 O を通り ℓ に垂直な直線を ℓ' とし，ℓ と ℓ' との交点を P とする．

(1)　線分 OP の長さを求めよ．

(2)　ℓ と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする．$\sin\theta$ を a を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

$f(x)=e^{-x^2}$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ，原点 O を通り ℓ に垂直な直線を ℓ' とし，ℓ と ℓ' との交点を P とする．

（1） 線分 OP の長さを求めよ．

（2） ℓ と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．$\sin\theta$ を a を用いて表せ．

（3） （2）で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

【テーマ】：接線と最大・最小

方針

(1) は，OP の長さが原点と接線 ℓ との距離であることに気付けるかどうかで計算量がかなり変わってきます．(2) は，三角比を利用して計算してもよいですし，傾きと $\tan\theta$ の関係を利用しても求められます．(3) は，$\sin\theta$ の中を丸ごと新しい関数と考えてもよいですし，分母だけに a を集めて部分的な最小値を考えることもできます．

♣ ♠

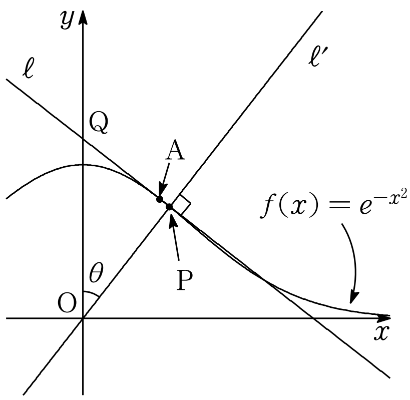
解答

（1） $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ より，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式は，

$$y=-2ae^{-a^2}(x-a)+e^{-a^2} \iff y=-2ae^{-a^2}x+(2a^2+1)e^{-a^2}$$

である．題意より，OP の長さは，原点と直線 ℓ との距離に等しいので，

$$\mathrm{OP}=\frac{\left|-(2a^2+1)e^{-a^2}\right|}{\sqrt{\left(2ae^{-a^2}\right)^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}}\cdots\cdots(\quad)$$



（2） 直線 ℓ' の傾きは，$\dfrac{1}{2ae^{-a^2}}$ であるから，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{2ae^{-a^2}} \iff \frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2ae^{-a^2}}$$

である．一方，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ であるから，

$$1+\frac{1}{4a^2e^{-2a^2}}=\frac{1}{\sin^2\theta} \iff \frac{4a^2e^{-2a^2}+1}{4a^2e^{-2a^2}}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\sin^2\theta=\frac{4a^2e^{-2a^2}}{4a^2e^{-2a^2}+1}=\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\sin\theta\geqq 0$ であるから，

$$\sin\theta=\boldsymbol{\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}}\cdots\cdots(\quad)$$

（3） （2）より，$a\neq 0$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}}=\sqrt{\frac{4}{4+\dfrac{e^{2a^2}}{a^2}}}$$

と変形できるので，$g(a)=\dfrac{e^{2a^2}}{a^2}$ とおくと，$\sin\theta$ が最大となるのは，$g(a)$ が最小になるときである．

$$g'(a)=\frac{4ae^{2a^2}\cdot a^2-e^{2a^2}\cdot 2a}{a^4}=\frac{2(2a^2-1)e^{2a^2}}{a^3}$$

より，$g'(a)=0$ のとき，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$y=g(a)$ のグラフは，y 軸に関して対称であるから，$x>0$ で増減表を考えると，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{e}{\frac{1}{2}}=2e$ であるから，対称性を考慮して，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(a)$ は最小値 $2e$ をとる．このとき，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{4}{4+2e}}=\sqrt{\frac{2}{e+2}}$$

より，$\sin\theta$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{2}{e+2}}$ をとる．以上より，求める $\sin\theta$ の最小値とそのときの a の値は，

$$\boldsymbol{\sqrt{\frac{2}{e+2}}\quad\left(a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\cdots\cdots(\quad)$$

である．

解説

(1) は，接線の方程式を求め，さらに法線の方程式を求めて接線の方程式と連立させ，点 P の座標を求めて原点との距離を考えると膨大な計算量になってしまいます．簡単なグラフをかいて状況を把握できれば，原点と直線 ℓ の距離が OP であることは容易にわかります．方針の立て方で大きく計算量が変わるので注意しましょう．

(2) は，出題者の意図を考えれば，(1) で OP の長さを求めさせているので，△OPQ で三角比を用いて $\sin\theta$ を求めるのでしょう．ただし，直接 $\sin\theta$ を出すのは大変なので，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}$ から $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ を用いて求めましょう．解答では，傾きと $\tan\theta$ の関係を用いて求めてみました．これは，$\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係式があるのでそれを使おうという意図があるからです．その関係式は，

$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

です．この関係式は，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割れば導かれます．$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と導出方法が同じなので，知らなくても導くことはできるようにしておきましょう．

(3) は，$g(a)=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ とおいて微分しても求めることができますが，計算がやや面倒なので，先に分子分母を a^2 で割って考えました．ただし，$a\neq 0$ でないと割れませんので注意して下さい．$g(a)=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ のまま計算するのであれば，$2a^2=t$ とおいて，$h(t)=\dfrac{2t}{2t+e^t}$ $(t\geqq 0)$ とする方が計算が少し楽になるのでよいでしょう．

以下の問いに答えよ．

（1） 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ．

（2） $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ．

（3） $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α, β を求めよ．ただし，$0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする．

以下の問いに答えよ．

（1） 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ．

（2） $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ．

（3） $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α, β を求めよ．ただし，$0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする．

方針

(1) は，加法定理を用いれば容易に示せます．(2) は，(1) の結果を利用します．$\theta = 80^\circ$ としてみると ⋯．
(3) は，(2) と同様にして他の解を導きます．$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおいて，$f(2\cos\theta)$ を考えます．

解答

(1)

加法定理より，

$$
\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

ゆえに，示された．

(2)

$\theta = 80^\circ$ とすると，

$$\cos 3\theta = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

である．よって，(1) の結果から，

$$\cos 240^\circ = 4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ$$

$$-\frac{1}{2} = 4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ$$

$$8\cos^3 80^\circ - 6\cos 80^\circ + 1 = 0$$

$x = 2\cos 80^\circ$ とおくと，

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

となる．ゆえに，$x = 2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることが示された．

(3)　$f(x)=x^3-3x+1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(2\cos\theta)&=8\cos^3\theta-6\cos\theta+1\\ &=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1\\ &=2\cos3\theta+1 \end{aligned}$$

よって，$f(2\cos\theta)=0$ となるのは，$\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときであり，$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ より，

$$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ \iff \theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$$

$0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ かつ $\alpha\neq80^\circ$，$\beta\neq80^\circ$ より，

$\boldsymbol{\alpha=40^\circ}$，$\boldsymbol{\beta=160^\circ}$……(　)

解説

3 次方程式の解を三角関数で表そうという問題です．加法定理の応用ということで出題されます．(1) は，3 倍角の公式なので楽勝でしょう．(2) は，$\theta=80^\circ$ であることと $3\theta=240^\circ$ であることから，方針が見えてきます．(3) は，(2) と同様に考えれば，結局 $\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$ になればよいということになるので，これに気付けば解けるでしょう．少し経験がないと後半は難しく感じる問題ですが，この問題はまだ易しい方です．少し古い問題だと 1975 年九州大学・1996 年京都大学で出題されていて，最近では 2013 年東北大学・筑波大学・横浜国立大学など，多くの大学で類題が出題されています．解法をしっかりと理解しておき類題が出題されても解けるようにしておきましょう．

xy 平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{2}x^2$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ $(t \neq 1)$ における接線を，P を中心として反時計回りに 45° 回転して得られる直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) C と ℓ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

xy 平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{2}x^2$ がある．C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ $(t \neq 1)$ における接線を，P を中心として反時計回りに 45° 回転して得られる直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1)　ℓ の方程式を求めよ．

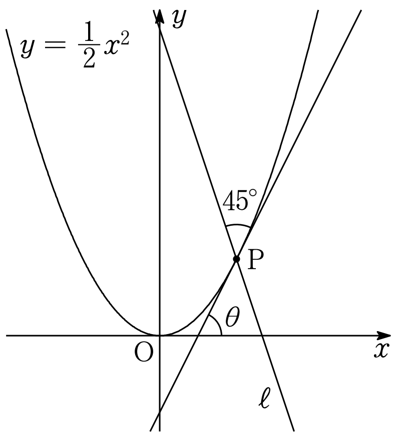
(2)　C と ℓ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

方針

傾きは，$\tan\theta$ を用いて表せます．放物線と直線で囲まれる部分の面積は，公式が使えますが，交点の座標が文字で表されているためその大小によって符号が変化することに注意が必要です．(3) の面積の最小値は，相加平均・相乗平均の関係を用いるか，理系の人は，微分をして求めることもできます．

解答



(1)　$y' = x$ であるから，C 上の点 P における接線の傾きは t である．この接線と x 軸の正の方向とのなす角を θ とすると，$\tan\theta = t$ であるから，直線 ℓ の傾きは，$\tan(\theta + 45^\circ)$ になる．よって，

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan\theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{t+1}{1-t}$$

である．ゆえに，求める直線 ℓ の方程式は，

$$y = \frac{t+1}{1-t}(x - t) + \frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y = \frac{1+t}{1-t}x + \frac{t^3 + t^2 + 2t}{2(t-1)}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　C と ℓ の交点の x 座標は，

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1+t}{1-t}x + \frac{t^3+t^2+2t}{2(t-1)} \iff (x-t)\left(x - \frac{t^2+t+2}{1-t}\right) = 0 \cdots\cdots Ⓐ$$

よって，$x = t,\ \dfrac{t^2+t+2}{1-t}$ となる．この 2 数の小さい方を α とし，大きい方を β とすると，面積 $S(t)$ は，

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_\alpha^\beta \left\{\left(\frac{1+t}{1-t}x + \frac{t^3+t^2+2t}{2(t-1)}\right) - \frac{1}{2}x^2\right\} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \cdots\cdots Ⓑ \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\
&= \frac{1}{12}\left|t - \frac{t^2+t+2}{1-t}\right|^3 = \frac{1}{12}\left|\frac{-2(t^2+1)}{t-1}\right|^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}\left|\frac{t^2+1}{t-1}\right|^3} \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(3)　(2) より，$f(t) = \left|\dfrac{t^2+1}{t-1}\right|$ とおくと，$f(t)$ の最小値を求めればよい．

(i)　$t > 1$ のとき，

$$f(t) = \frac{t^2+1}{t-1} = \frac{(t-1)(t+1)+2}{t-1} = t + 1 + \frac{2}{t-1} = t - 1 + \frac{2}{t-1} + 2$$

$t-1>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$f(t) \geqq 2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+2=2\sqrt{2}+2$$

等号は，$t-1=\dfrac{2}{t-1}$ すなわち $t=1+\sqrt{2}$ のとき成立する．

(ii) $t<1$ のとき，(i) のときと同様に $f(t)$ を式変形すると，

$$f(t)=\frac{t^2+1}{1-t}=1-t+\frac{2}{1-t}-2$$

$1-t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$f(t) \geqq 2\sqrt{(1-t)\cdot\frac{2}{1-t}}-2=2\sqrt{2}-2$$

等号は，$1-t=\dfrac{2}{1-t}$ すなわち $t=1-\sqrt{2}$ のとき成立する．

(i), (ii) より，$f(t)$ が最小となるときの t の値は，$\boldsymbol{t=1-\sqrt{2}}$……(**答**)

解説

Ⓐ の式変形は，それだけで式変形すると大変ですが，そこまでの計算過程をしっかりと把握できれば暗算でできます．なぜなら，直線 ℓ は点 P で C と交わっているので，因数分解したときに $x-t$ が因数として出てくることが分かるからです．したがって，残りの因数は，x の 2 次の係数と定数項だけを考えて因数分解すれば容易にできます．実用的に使えるようにしっかりと演習をしておきましょう．

Ⓑ の式変形も意味を考えて変形すれば容易に行えます．α, β は Ⓐ の 2 解です．そして，面積を計算する際の被積分関数は，直線 ℓ の方程式から曲線 C の方程式を引いた形になるので，それを因数分解するということは，Ⓐ の左辺と同じ形になります (2 次の係数には注意しましょう)．この形になれば，下の公式が使えます．

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の 2 解を α, $\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，a がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．

(3) の最小値を求める方法は，解答では相加平均・相乗平均の関係を用いましたが，理系の人は，数学 Ⅲ の微分を用いても求めることができます．

$f(t)=\dfrac{t^2+1}{t-1}$ とおくと，$f'(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{(t-1)^2}$ なので，$f'(t)=0$ のとき，$t=1\pm\sqrt{2}$ となります．あとは，増減表をかいてグラフをかけば，$|f(t)|$ が最小となるのは，$t=1-\sqrt{2}$ のときであることが分かります．文系の人は，知っている知識を活用するため，巧みな式変形が必要ですが，理系の人は数学 Ⅲ の微分を使った方が楽に求められるでしょう．

n は自然数とする．次の問いに答えよ．

（1） 次に不等式を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

（2） $x > 0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

（3） 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k \sin \frac{1}{k} \right)$$

n は自然数とする．次の問いに答えよ．

（1）　次に不等式を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$$

（2）　$x>0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

（3）　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{1}{k}\right)$$

【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，面積の比較をして不等式を作ります．(2) は，差をとって微分します．(3) は，(1), (2) の結果を用います．

♣　♠

解答

（1）**【証明】**

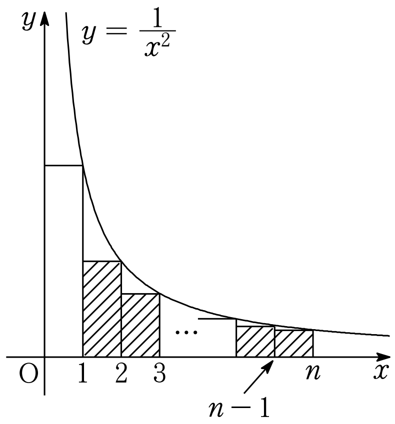
右図において，長方形の面積と $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=n$, x 軸で囲まれる部分の面積の大小を比較して，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=-\frac{1}{n}+1$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}<2$$

となり，示された．　**（証明終）**



（2）**【証明】**

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$ であるから，$x>0$ で $f(x)$ は単調増加である．

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ で $f(x)>0$ が成り立ち，

$$\sin x<x\ \cdots\cdots\ ①$$

が示された．また，$g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right),\quad g''(x)=-\sin x+x=f(x)>0$$

であるから，$x>0$ で $g'(x)$ は単調増加であり，$g'(0)=0$ であるから，$x>0$ で $g'(x)>0$ が成り立つ．

よって，$g(x)$ は単調増加であり，$g(0)=0$ であるから，$x>0$ で $g(x)>0$ が成り立つので，

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x\ \cdots\cdots\ ②$$

が示された．

①, ② より，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ が示された.　　　　**(証明終)**

(3)　(2) より，$x=\dfrac{1}{k}(>0)$ とおくと，

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{6k^3}<\sin\frac{1}{k}<\frac{1}{k} \iff 1-\frac{1}{6k^2}<k\sin\frac{1}{k}<1 \quad (\because\ k>0)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{6k^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<\sum_{k=1}^{n}1$$

$$n-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<n \iff 1-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<1 \cdots\cdots ③$$

(1) で示した不等式の両辺に $-\dfrac{1}{6n}<0$ をかけて，両辺に 1 を加えると，

$$2>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \iff -\frac{1}{6n}\cdot 2<-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \iff 1-\frac{1}{3n}<1-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \cdots\cdots ④$$

となるので，③, ④ より次式が成り立つ.

$$1-\frac{1}{3n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<1$$

$n\to\infty$ のとき，$\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)\to 1$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)=\mathbf{1}\cdots\cdots(\text{答})$$

である.

◇　　　　♡

解説

(1) は，何度か経験していると方針がすぐに浮かぶ問題です．逆に，方針が浮かばなかった人はこのような問題に不慣れである可能性が高いので，十分に類題演習をしておきましょう．また，この問題は次のように，数列の和を使っても示すことができます.

別解

(1) の別解

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} && \text{☜ 次の式変形をするために } k=1 \text{ のときだけを和から除く.}\\ &<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} && \text{☜ 分母を小さくすれば分数の値は大きくなる.}\\ &=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) && \text{☜ 部分分数分解}\\ &=1+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\\ &=2-\frac{1}{n}\\ &<2\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ は計算できませんが，分母を連続する 2 つの整数の積にすれば部分分数分解ができるので，計算できるようになります.

(2) は，微分をして単調性を調べれば示すことができます．基本問題なので，確実にできるようにしましょう.

(3) は，(1), (2) の結果をどのように使うかが試される問題です．(2) で $x=\dfrac{1}{k}>0$ とおくことがポイントになります．ただし，前問の結果を使うときは仮定（ここでは，$x>0$）が満たされていないといけないので，そのチェックを忘れないようにしましょう.

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す．

（1） 試行が 1 回めで終了する確率 p_1，および 2 回めで終了する確率 p_2 を求めよ．

（2） 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ．

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す．

（1） 試行が 1 回めで終了する確率 p_1，および 2 回めで終了する確率 p_2 を求めよ．

（2） 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ．

【テーマ】：独立・反復試行の確率

方針

(1) は，すべての場合を考えれば求められます．(2) は，余事象を考えましょう．

♣ ♠

解答

（1） 試行が 1 回目で終了するのは，すべての硬貨が裏となるときであるから，求める確率は，

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}\cdots\cdots(\text{答})$$

2 回目で終了するのは，1 回目で少なくとも 1 枚は表が出て 2 回目ですべて裏であればよいので，1 回目の表の枚数で場合分けをすると，

(i) 1 枚だけ表のとき， ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

(ii) 2 枚だけ表のとき， ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) 3 枚とも表のとき， $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

したがって，求める確率は，

$$\begin{aligned}p_2&={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\\&=\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}\\&=\boldsymbol{\frac{19}{64}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（2） ある硬貨が k 回目までに取り除かれないのは，k 回とも表が出るときであるから，ある硬貨が k 回目までに取り除かれる確率は，余事象の確率より，

$$1-\frac{1}{2^k}$$

である．$n\geqq 2$ のとき，試行が n 回以上行われないのは，$n-1$ 回目までにすべての硬貨が取り除かれるときであるから，その確率は，

$$\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3$$

である．ゆえに，求める確率は，余事象の確率より，

$$q_n=1-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3=\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{3}{4^{n-1}}+\frac{1}{8^{n-1}}$$

であり，これは $n=1$ のときも満たしている．ゆえに，

$$q_n=\boldsymbol{\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{3}{4^{n-1}}+\frac{1}{8^{n-1}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

♢ ♡

解説

(1) では，p_2 を求める際に表が出た枚数で場合分けを行ったが，(2) と同様に考えても求めることができます．

(2) は，(1) のように表が出た枚数で場合分けを行うと，n 回という一般的な状況では解決するのは困難です．そこで，試行が n 回以上行われない場合の確率を考えることがポイントになります．

放物線 $y = x^2$ を C で表す．C 上の点 Q を通り，Q における C の接線に垂直な直線を，Q における C の法線という．$0 \leqq t \leqq 1$ とし，次の 3 条件を満たす点 P を考える．

(イ) C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\, t^2)$ における C の法線の上にある．

(ロ) 領域 $y \geqq x^2$ に含まれる．

(ハ) P と Q の距離は $(t - t^2)\sqrt{1 + 4t^2}$ である．

t が 0 から 1 まで変化するとき，P の描く曲線を C' とする．このとき，C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ．

放物線 $y=x^2$ を C で表す．C 上の点 Q を通り，Q における C の接線に垂直な直線を，Q における C の法線という．$0 \leqq t \leqq 1$ とし，次の 3 条件を満たす点 P を考える．

(イ) C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\,t^2)$ における C の法線の上にある．

(ロ) 領域 $y \geqq x^2$ に含まれる．

(ハ) P と Q の距離は $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ である．

t が 0 から 1 まで変化するとき，P の描く曲線を C' とする．このとき，C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ．

【テーマ】：軌跡と面積

方針

点 P の座標は，ベクトルを用いて計算すると楽に求められます．

解答

$y'=2x$ であるから，接線の方向ベクトル $\vec{\ell}$ は，$\vec{\ell}=(1,\,2t)$ である．よって，点 Q における放物線 C の法線に平行なベクトル $\vec{m}$ は，実数 k を用いて，

$$\vec{m}=k(-2t,\,1)$$

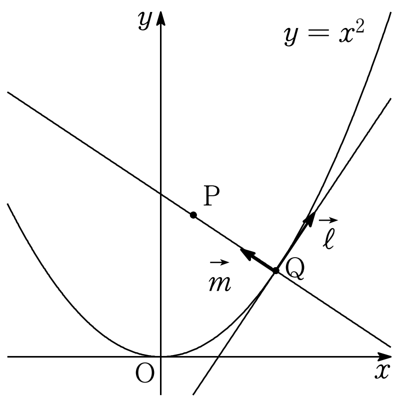
と表すことができる．条件 (ロ) より，$k>0$ であり，条件 (ハ) より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} /\!/ \vec{m}$ より，

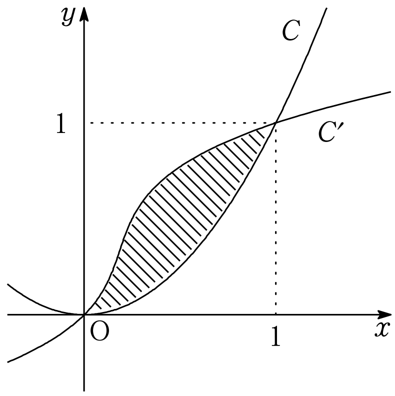
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,\,1)\\&=(t-t^2)(-2t,\,1)\\&=(-2t^2+2t^3,\,t-t^2)\end{aligned}$$

☞ 解説



である．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\&=(t,\,t^2)+(-2t^2+2t^3,\,t-t^2)\\&=(t-2t^2+2t^3,\,t)\end{aligned}$$



である．$\mathrm{P}(X,\,Y)$ とおくと，

$$X=t-2t^2+2t^3,\quad Y=t$$

であるから，t を消去して，

$$X=Y-2Y^2+2Y^3$$

を得る．ゆえに，曲線 C' の方程式は，

$$x=y-2y^2+2y^3\quad(0 \leqq y \leqq 1)$$

である．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy}&=1-4y+6y^2\\&=6\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>0\end{aligned}$$

であるから，x は y について単調増加である．これより，曲線 C' の概形は上図のようになるので，C と C' で囲まれた部分は図の斜線部分である．この斜線部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \left\{\sqrt{y} - (y - 2y^2 + 2y^3)\right\}\, dy \\ &= \left[\ \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4\ \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}} \cdots\cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

様々な解法がありますが，ベクトルを用いた解法が単純明快でしょう．他にも，法線の方程式を求め，点 $\mathrm{P}(X,\,Y)$ とおいて，条件 (ロ) と (ハ) を満たすように，式を作り $X,\,Y$ の関係式を求める方法や，90° の回転を行列を用いて処理することもできます．

ベクトルを用いて解く方法では，ベクトルの回転と大きさの調整に慣れていないと難しく感じます．実際にあまり経験をしたことがない人が多く，慣れるまでは演習が必要です．この解法のポイントは，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を求める部分にあります．これは，次のようにして求めています．

まず，$\overrightarrow{m}$ を求めます．これは，$\overrightarrow{\ell}$ と垂直なベクトルなので，$\overrightarrow{\ell}$ の成分を入れ替えて片方の符号を変えればいいだけです．これで $\overrightarrow{\ell}$ と $\overrightarrow{m}$ の内積が 0 になるため $\overrightarrow{\ell}$ と $\overrightarrow{m}$ は必ず直交します．次に向きですが，条件 (ロ) があるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = k(-2t,\,1)\ (k > 0)$$

となることが分かります．もしも $\overrightarrow{m} = (2t,\,-1)$ としていたならば，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = k(2t,\,-1)\ (k < 0)$ になります．x 座標と y 座標の値が増えるのか減るのかに着目すれば k の符号が定まります．さらに，条件 (ハ) があるので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|$ を考えます．そのために，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の単位ベクトルを求めます．あとは大きさが $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ になればよいので，単位ベクトルにこれをかければ，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の完成です．

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,\,1)}_{\overrightarrow{\mathrm{QP}}\ \text{の単位ベクトル}}$$

慣れてしまえば一瞬で終わる作業なのですが，慣れるまではこのような手順をしっかりと確認しながら一つ一つ理解しましょう．

面積を求める際は，C' のグラフがどのようになるかが問題となりますが，$\dfrac{dx}{dy}$ で単調性がわかれば正確なグラフをかく必要はありません．C' と C の上下関係がわかればよいので，大まかなグラフで十分です．

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする.

（1） $a_2,\ b_2$ を求めよ.

（2） $a_{n+1},\ b_{n+1}$ を a_n と b_n を用いて表せ.

（3） 各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ.

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする.

(1)　$a_2,\ b_2$ を求めよ.

(2)　$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を a_n と b_n を用いて表せ.

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ.

【テーマ】：連立漸化式

方針

(1) は，x^2 を $x^2-6x-12$ で割ったときの余りを求めます. (2) は漸化式を導くので，(1) と同様に作った x^n の式において x^{n+1} を作るために，両辺を x 倍します. (3) は，まず $a_n,\ b_n$ が 6 の倍数であることを示して，素数の性質を利用し示します.

♣　♠

解答

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ったときの余りは，

$$x^2=(x^2-6x-12)+6x+12$$

より，$6x+12$ である. したがって，

$$\boldsymbol{a_2=6,\ b_2=12}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると，

$$x^n=(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

よって，

$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx\\&=x(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_n(x^2-6x-12)+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

より，

$$\left\{\begin{array}{ll}\boldsymbol{a_{n+1}=6a_n+b_n} & \cdots\cdots\ ①\\ \boldsymbol{b_{n+1}=12a_n} & \cdots\cdots\ ②\end{array}\right.\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　$n=2$ のとき，$a_2=6,\ b_2=12$ であるから，$a_2,\ b_2$ は 6 の倍数である. ゆえに，①, ② から帰納的に $a_n,\ b_n$ は 6 の倍数であることがわかる.

ここで，$n \geqq 3$ のとき，公約数の中で 2, 3 以外の素数 p が存在すると仮定すると，② より，

$$\begin{aligned}b_n&=12a_{n-1}\\&=2^2\cdot 3a_{n-1}\end{aligned}$$

であるから，a_{n-1} は p の倍数となる. よって，① より，

$$b_{n-1}=a_n-6a_{n-1}$$

となり，$a_n,\ a_{n-1}$ が p の倍数となるので，b_{n-1} は p の倍数である. これを繰り返すと，$a_2,\ b_2$ も p の倍数と

なるが，

$$a_2 = 2 \cdot 3,\quad b_2 = 2^2 \cdot 3$$

となるので，矛盾する．

ゆえに，a_n と b_n の公約数で素数となるのは，

2 と 3……(答)

である．

―――――――――――― ♢ ―――――――――――― ♡ ――――――――――――

解説

(1) は，具体的に $n = 2$ を代入して x^2 を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを求めますが，わざわざ筆算をしなくても次数が同じなので，余りは式変形だけで求められます．

(2) は，漸化式を導く問題ですが，x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りは $a_n x + b_n$ と与えられているので，x^{n+1} を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りは $a_{n+1}x + b_{n+1}$ となります．そこで，x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った商を設定して式を作ります．整式の問題は，言葉で与えられていることが多いので自分で商や余りを設定して式を作らなければいけません．あとは，解答のように両辺に x をかけて x^{n+1} を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを求めますが，このままでは余りが 2 次式になってしまうので，さらに (1) と同じように式変形をして余りが 1 次式以下になるようにします．

(3) は，類題を解いたことがなければ難しいと思います．まずは，$n = 2, 3$ などで答えとなる素数を見つけることから始めます．(いわゆる実験をします) そうすると 2, 3 が答えになるだろうなという予想ができますから，2, 3 以外の素数 p が存在するとして矛盾を導きます (背理法)．普段は，n を大きくしていきますが，今回は a_2, b_2 が 2, 3 以外の素数を持っていないことから，n を小さくして最終的に $n = 2$ まで下げていくことを考えます．

r を正の実数とする．xy 平面上の点 A$(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円を C とする．点 B$\left(0,\ -\dfrac{2}{r+2}\right)$ から C に傾きが正の接線を引き，接点を P とする．r がすべての正の実数を動くとき，P の軌跡を図示せよ．

r を正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円を C とする．点 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{r+2}\right)$ から C に傾きが正の接線を引き，接点を P とする．r がすべての正の実数を動くとき，P の軌跡を図示せよ．

【テーマ】：軌跡

方針

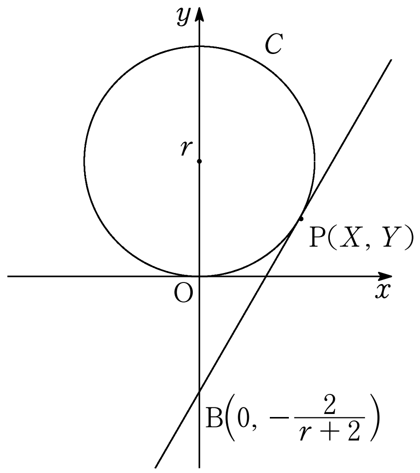
軌跡を求める点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおいて，$X,\ Y$ の関係式を導きます．点 P における接線が点 B を通るという条件を用います．

♣ ♠

解答

円 C の方程式は，$x^2+(y-r)^2=r^2$ であるから，点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X^2+(Y-r)^2=r^2 \cdots\cdots ①$$



を満たす．点 P における円の接線の方程式は，

$$Xx+(Y-r)(y-r)=r^2$$

であるから，これが点 B を通るとき，

$$(Y-r)\left(-\frac{2}{r+2}-r\right)=r^2$$

$$(Y-r)\left(-\frac{r^2+2r+2}{r+2}\right)=r^2$$

$r^2+2r+2 \neq 0$ であるから，

$$Y-r=r^2\left(-\frac{r+2}{r^2+2r+2}\right)$$

$$Y=r-\frac{r^3+2r^2}{r^2+2r+2}=\frac{2r}{r^2+2r+2}$$

また，① より，

$$\begin{aligned}
X^2&=r^2-(Y-r)^2\\
&=\{r+(Y-r)\}\{r-(Y-r)\}\\
&=Y(2r-Y) \cdots\cdots ②\\
&=\frac{2r}{r^2+2r+2}\left(2r-\frac{2r}{r^2+2r+2}\right)\\
&=\frac{2r}{r^2+2r+2}\cdot\frac{2r(r+1)^2}{r^2+2r+2}\\
&=\left\{\frac{2r(r+1)}{r^2+2r+2}\right\}^2
\end{aligned}$$

$X>0,\ r>0$ より，$X=\dfrac{2r(r+1)}{r^2+2r+2}$ である．ゆえに，点 P の座標を r を用いて表すと，

$$\mathrm{P}\left(\frac{2r(r+1)}{r^2+2r+2},\quad \frac{2r}{r^2+2r+2}\right)$$

となるので，これより r を消去すればよい．$X=(r+1)Y$ であるから，

$$X=rY+Y \iff rY=X-Y$$

となる．よって，これを ② へ代入すると，

$$X^2 = 2rY - Y^2 \iff X^2 = 2(X - Y) - Y^2 \iff (X-1)^2 + (Y+1)^2 = 2$$

を得る．$Y > 0$ より，$Y + 1 > 1$ であるから，

$$2 - (X-1)^2 > 1 \iff 0 < X < 2$$

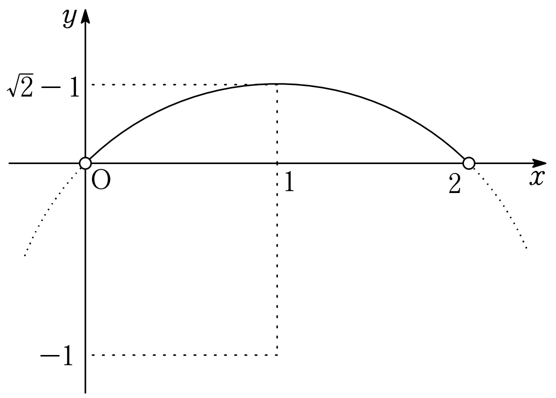
である．このとき，$0 \leqq 2 - (Y+1)^2 < 1$ であるから，

$$0 < Y \leqq \sqrt{2} - 1$$

である．よって，点 P の軌跡は，

$$円\ :(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \quad (0 < x < 2,\ 0 < y \leqq \sqrt{2} - 1)$$

であり，これを図示すると下図のようになる．ただし，白丸は含まない．



◇ ♡

$\boxed{解説}$

方針は立てやすい問題ですが，文字計算が大変なので計算間違いをしないようにしなければいけません．r を消去する方法は様々ですができるだけ簡潔に計算をしなければミスする可能性が大きくなります．また，計算途中に文字式での割り算があるので，0 か 0 でないかの吟味も忘れずにしなければ減点されてしまいます．$r^2 + 2r + 2 \neq 0$ としたのは，

$$r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 > 0$$

だからです．また，最後に定義域などを調べる（いわゆる軌跡の限界）ことを忘れないようにしましょう．

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$, $\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

（2） 数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2k}{3}\,\right]$ $(k=1,\,2,\,\cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$, $\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2k}{3}\,\right]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と和

方針

(1) は，基本的な公式の証明です．(2) は (1) をヒントにして 3 で割った余りで場合分けを行います．

解答

(1)　**【証明】**

a は実数であるから，

$$[\,a\,] \leqq a < [\,a\,]+1$$

が成り立つので，

$$[\,a\,]+m \leqq a+m < [\,a\,]+m+1$$

$[\,a\,]+m$ は整数なので，

$$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$$

が成り立つことが示された．　**(証明終)**

(2)　(1) の結果より，m を自然数として，

(i)　$k=3m$ のとき，

$$a_{3m}=\left[\,\frac{2\cdot 3m}{3}\,\right]=[\,2m\,]=2m$$

(ii)　$k=3m-1$ のとき，

$$a_{3m-1}=\left[\,\frac{2\cdot(3m-1)}{3}\,\right]=[\,2m-\tfrac{2}{3}\,]=\left[\,2m-1+\frac{2}{3}\,\right]=2m-1+\left[\,\frac{2}{3}\,\right]=2m-1$$

(iii)　$k=3m-2$ のとき，

$$a_{3m-2}=\left[\,\frac{2\cdot(3m-2)}{3}\,\right]=[\,2m-\tfrac{4}{3}\,]=\left[\,2m-2+\frac{2}{3}\,\right]=2m-2+\left[\,\frac{2}{3}\,\right]=2m-2$$

よって，i を自然数として，

(ア)　$n=3i$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{3i} a_k\\ &= \sum_{k=1}^{i}(a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2})\\ &= \sum_{k=1}^{i}(2k+2k-1+2k-2)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{i}(6k-3)$$
$$= 6\cdot\frac{1}{2}i(i+1)-3i$$
$$= 3i^2$$
$$= \frac{n^2}{3} \quad \left(\because \ \ i=\frac{n}{3}\right)$$

(イ) $n=3i-1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3i-1} a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{i}(a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2})-a_{3i}$$
$$= 3i^2-2i \quad (\because \ (ア))$$
$$= 3\left(\frac{n+1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{3} \quad \left(\because \ \ i=\frac{n+1}{3}\right)$$
$$= \frac{n^2-1}{3}$$

(ウ) $n=3i-2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3i-2} a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{i-1}(a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2})+a_{3i-2}$$
$$= 3(i-1)^2+2i-2 \quad (\because \ (ア))$$
$$= 3i^2-4i+1p$$
$$= 3\left(\frac{n+2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{n+2}{3}+1 \quad \left(\because \ \ i=\frac{n+2}{3}\right)$$
$$= \frac{n^2-1}{3}$$

ゆえに，i を自然数として，

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{n^2}{3} & (n=3i) \\ \dfrac{n^2-1}{3} & (n=3i-1,\ 3i-2) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

解説

(1) は，ガウス記号に関する基本的な性質です．問題文中に 実数 x に対して，$[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ が成り立つことが書かれているので，これをヒントにすれば容易に示せます．

(2) は，ガウス記号を含む数列の和なので，経験がないと難しいでしょう．まず，$k=1, 2, 3, \cdots$ を代入してみて a_k や $\sum_{k=1}^{n} a_k$ がどのような値になるかを実験してみると様子が分かってくるでしょう．3 を周期として同じ値が繰り返されるはずです．それは，$a_k = \left[\ \dfrac{2k}{3}\ \right]$ なので，分母が 3 であることから予想することができます．あとは，k を 3 で割った余りで場合分けをして，a_k を求めます．次に和ですが a_k が 3 を周期としている数列なので，和も n を 3 で割った余りで場合分けをします．結果的には，3 で割り切れるか割り切れないかの 2 通りになりますが，これはあくまで結果論です．