$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

経験がないと難しい問題ですが，まず極限を無視して a_n とおいて自然対数を考えましょう．その後，組合せの計算をすれば区分求積法に持っていけることがわかります．

♣ ♠

解答

$a_n=\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおく．a_n は正数であるから，両辺自然対数をとると，

$$\begin{aligned}\log a_n &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{(3n)!}{(2n)!\cdot n!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}\right)\\ &= \frac{1}{n}\log\frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}\\ &= \frac{1}{n}\log\frac{3\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3-\frac{n-1}{n}\right)}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{n-1}{n}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(3-\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(2-\frac{k}{n}\right)\right\}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(3-\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(2-\frac{k}{n}\right)\right\}\\ &= \int_0^1\log(3-x)\,dx-\int_0^1\log(2-x)\,dx\\ &= \Big[-(3-x)\log(3-x)\Big]_0^1-\int_0^1(3-x)\cdot\frac{-1}{3-x}\,dx\\ &\qquad -\Big[-(2-x)\log(2-x)\Big]_0^1+\int_0^1(2-x)\cdot\frac{-1}{2-x}\,dx\\ &= -2\log 2+3\log 3+1-2\log 2-1\\ &= 3\log 3-4\log 2=\log\frac{27}{16}\end{aligned}$$

を得るので，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{27}{16}}\cdots\cdots(\text{答})$$

♢ ♡

積の形で出てきた場合は，対数を利用することで和の形に変形することができます．これを利用するため，まず極限を無視して a_n とおき自然対数をとりました．組合せの計算（階乗計算）をうまくしないと区分求積法に持っていけなくなります．

放物線 $y = x^2 - 4$ を平行移動して，x 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\,0)$, $\mathrm{B}(b,\,0)$ を通る放物線にするには，どう移動すればよいか．またこのようにして得られた放物線において $a,\,b$ が条件 $ab = 4$ を満たしながら変わるとき，その頂点がえがく図形を求めよ．

放物線 $y=x^2-4$ を平行移動して，x 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\,0)$, $\mathrm{B}(b,\,0)$ を通る放物線にするには，どう移動すればよいか．またこのようにして得られた放物線において $a,\,b$ が条件 $ab=4$ を満たしながら変わるとき，その頂点がえがく図形を求めよ．

【テーマ】：軌跡

方針

移動後の放物線の方程式を求めて，頂点の移動を調べます．後半は，軌跡の問題なので，頂点の座標を $(X,\,Y)$ として，$X,\,Y$ の関係式を導きましょう．

♣ ♠

解答

点 A, B を通る放物線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= (x-a)(x-b) \\ &= x^2-(a+b)x+ab \\ &= \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a+b)^2}{4}+ab \\ &= \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4} \end{aligned}$$

よって，頂点の移動を調べると，点 $(0,\,-4)$ が 点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\,-\dfrac{(a-b)^2}{4}\right)\cdots$ ① に移るので，

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}\ \textbf{軸方向へ}\ \boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}} \\ \boldsymbol{y}\ \textbf{軸方向へ}\ \boldsymbol{4-\dfrac{(a-b)^2}{4}} \end{array}\right. \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

平行移動すればよい．このとき，頂点は

$$\left(\frac{a+b}{2},\,-\frac{(a+b)^2}{4}+ab\right)$$

であり，$ab=4$ であるから，$\left(\dfrac{a+b}{2},\,-\dfrac{(a+b)^2}{4}+4\right)$ となるので，頂点の座標を $(X,\,Y)$ とすると，

$$X=\frac{a+b}{2},\quad Y=-\frac{(a+b)^2}{4}+4$$

より，$Y=-X^2+4$ を得る．ここで，① より，頂点の y 座標に着目すると，

$$-\frac{(a-b)^2}{4}<0 \text{ であるから } Y<0$$

ゆえに，頂点の描く図形は，

放物線 ： $\boldsymbol{y=-x^2+4\ (y<0)}$ $\cdots\cdots$(答)

♢ ♡

解説

標準的な軌跡の問題ですが，最後のところで頂点の y 座標のとり得る値を求めるのを忘れやすいので注意しましょう．

4 次方程式

$$x^4 - 2x^3 + bx^2 - 2x + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

がある．次の問いに答えよ．

（1） ① が実数解をもつような b の値の範囲を求めよ．

（2） ① がちょうど 3 個の実数解をもつときの b の値とそのときの実数解を求めよ．

4 次方程式

$$x^4-2x^3+bx^2-2x+1=0 \cdots\cdots ①$$

がある．次の問いに答えよ．

（1） ① が実数解をもつような b の値の範囲を求めよ．

（2） ① がちょうど 3 個の実数解をもつときの b の値とそのときの実数解を求めよ．

【テーマ】：相反方程式

方針

両辺を x^2 で割り，$x+\dfrac{1}{x}=t$ と置き換えて t の 2 次方程式へ変換します．実数条件を忘れないようにしましょう．

♣ ♠

解答

（1） $x=0$ は与えられた方程式の解ではないので，両辺を $x^2 \neq 0$ で割ると，

$$x^2-2x+b-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \iff x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$

を得る．ここで，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$$

であることから，

$$t^2-2-2t+b=0 \iff t^2-2t-2+b=0 \iff -t^2+2t+2=b$$

を得る．一方

$$x+\frac{1}{x}=t \iff x^2-tx+1=0 \cdots\cdots ①$$

であり，この方程式の判別式を D とすると，x は実数であるから，$D \geqq 0$ である．したがって，

$$D=t^2-4 \geqq 0 \qquad \therefore\ t \leqq -2,\ 2 \leqq t \cdots\cdots ②$$

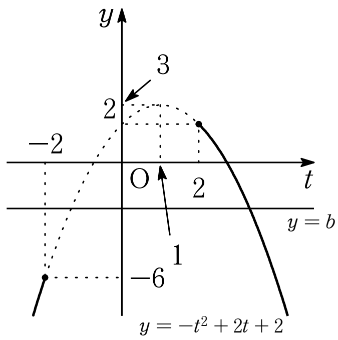
となる．よって，$f(t)=-t^2+2t+2$ とおくと，$y=f(t)$ と $y=b$ のグラフが ② の範囲で共有点をもてばよいので，

$$f(t)=-(t-1)^2+3$$

より，右図から求める b の値の範囲は，

$\boldsymbol{b \leqq 2}$……(答)

となる．



（2） t の値が 1 つ決まるとき，① より t と x の実数解の個数は次のように対応する．

$D>0$ のとき，　x は 2 個

$D=0$ のとき，　x は 1 個

$D<0$ のとき，　x は 0 個

よって，(1) のグラフから $b=-6$ のとき x の値は 3 個存在することがわかる．このとき，$t=-2,4$ であるから，

$t=-2$ のとき，① より，

$$x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \qquad \therefore \quad x=-1$$

$t=4$ のとき，① より，

$$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore \quad x=2\pm\sqrt{3}$$

以上より，b の値とそのときの解は，$\boldsymbol{b=-6,\ x=-1,\ 2\pm\sqrt{3}}$……(答)

◇ ♡

解説

相反方程式の解法をまとめておきましょう．

【相反方程式】

x の方程式 $P(x)=0$ において，その係数が左右対称になっている方程式を**相反方程式**という．

例：
- （i） 偶数次の相反方程式　$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$
- （ii） 奇数次の相反方程式　$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

$P(x)=0$ が n 次の相反方程式であるとする．

① n が偶数のとき，　$x=0$ は解とならないので，両辺を $x^{\frac{n}{2}}\neq 0$ で割ります．

② n が奇数のとき，　$x=-1$ が解となるので，$(x+1)$ で因数分解をします．
そうすると，偶数次の相反方程式が出てきます．

いずれにしても 両辺を $x^{\frac{n}{2}}$ で割った後は，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおいて，t に関する方程式を解き，その後 x の値を求めます．

本問は，偶数次の相反方程式です．単に方程式を解くだけでなく実数解の個数の問題となっているので，実数条件から t のとり得る値を求めるのを忘れないようにしましょう．また，t の個数と x の個数の関係を調べることにも慣れておく必要があります．このような個数を求める問題は様々なところで見かけるので確実にマスターして受験に臨んでください．

（1） 定積分 $\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ を求めよ.

（2） xy 平面上の曲線

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ を求めよ.

(2) xy 平面上の曲線

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

【テーマ】: 面積

方針

(1) は部分積分法で，同形出現のタイプです. (2) は媒介変数表示された曲線の面積計算です. 置換積分法を用いて計算しましょう.

♣ ♠

解答

(1) $I=\displaystyle\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ とおくと,

$$\begin{aligned}I&=\Big[-e^{-t}(\cos t-\sin t)\Big]_0^k+\int_0^k e^{-t}(-\sin t-\cos t)\,dt\\&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1-\int_0^k e^{-t}(\sin t+\cos t)\,dt\\&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1-\left\{\Big[-e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_0^k+\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt\right\}\end{aligned}$$

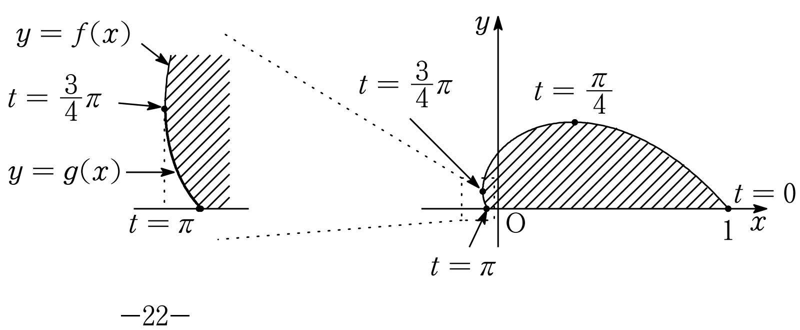
$$\begin{aligned}\therefore\quad 2I&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1+e^{-k}(\sin k+\cos k)-1\\&=2e^{-k}\sin k\end{aligned}$$

ゆえに, $I=\boldsymbol{e^{-k}\sin k}$……(答)

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t)$ であるから, $\dfrac{dx}{dt}=0$, $\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは, それぞれ $t=\dfrac{3}{4}\pi$, $\dfrac{\pi}{4}$ である. ゆえに, 増減表は次のようになる.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	1	$\leftarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\leftarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\rightarrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\downarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\downarrow$	0

これより, 与えられた曲線を図示すると右図のようになる.



ここで，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ の曲線を $y = f(x)$，

$\dfrac{3}{4}\pi \leqq t \leqq \pi$ の曲線を $y = g(x)$

とする．求める面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{1} f(x)\,dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{-e^{-\pi}} g(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t(-e^{-t}(\cos t + \sin t))\,dt - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t(-e^{-t}(\cos t + \sin t))\,dt \\
&= \int_{0}^{\frac{3}{4}\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin t\cos t + \sin^2 t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin 2t - \cos 2t + 1)\,dt
\end{aligned}
$$

ここで，$2t = x$ とおくと，$dt = \dfrac{1}{2}dx$ であるから，

t	$0 \to \pi$
x	$0 \to 2\pi$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} \{e^{-x}(\sin x - \cos x) + e^{-x}\}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{-2\pi}\sin 2\pi + \Big[-e^{-x}\Big]_{0}^{2\pi}\right) \quad (\because\ (1)) \\
&= \frac{1}{4}(-e^{-2\pi} + 1) = \boldsymbol{\frac{e^{2\pi} - 1}{4e^{2\pi}}} \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

部分積分法を行う際，e^x と $\sin x$, $\cos x$ の積であれば同形出現タイプになるので，定積分の値を I と置いて計算します．

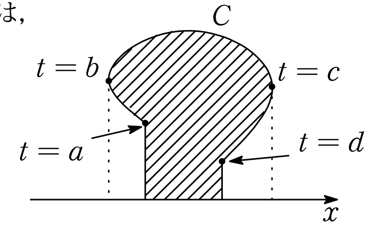
(2) のような媒介変数表示された関数で面積を求めるときは，下記の公式を使えば答えはすぐ求められますが，公式の成り立ちなどを理解しているうえで使わなければ思わぬ落とし穴に落ちることがあります．解答では，きちんとグラフの上下を考えて立式をしましたが，結局公式と同じ形になる点に注目しましょう．また，この公式は，本問の解答と同じ手順で示すことができるので，一度は導いて理解しておきましょう．

【媒介変数表示された曲線で囲まれる部分の面積】

$C:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(a \leqq t \leqq d)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \int_{a}^{d} g(t)f'(t)\,dt$$

である．



数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_k, \cdots$ を次のように，第 n 群が 2^{n-1} 個の項を含むように分ける．

$\{a_1\}$，$\{a_2, a_3\}$，$\{a_4, a_5, a_6, a_7\}$，$\{a_8, a_9, \cdots, a_{15}\}$，$\{\cdots\}$，$\cdots$

（1） 第 n 群の初項と末項を求めよ．

（2） $a_k = \dfrac{1}{k}$ のとき，第 n 群に含まれる項の和は $\dfrac{1}{2}$ より大きいことを示せ．

（3） $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，第 1 群から第 n 群までのすべての項の和は 2 を超えないことを示せ．

数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_k, \cdots$ を次のように，第 n 群が 2^{n-1} 個の項を含むように分ける．

$\{a_1\}$，$\{a_2,\ a_3\}$，$\{a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\}$，$\{a_8,\ a_9,\ \cdots,\ a_{15}\}$，$\{\cdots\}$，$\cdots$

(1) 第 n 群の初項と末項を求めよ．

(2) $a_k = \dfrac{1}{k}$ のとき，第 n 群に含まれる項の和は $\dfrac{1}{2}$ より大きいことを示せ．

(3) $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，第 1 群から第 n 群までのすべての項の和は 2 を超えないことを示せ．

【テーマ】：群数列と和の評価

方針

(1) は添え字に着目して考えます．(2), (3) はそのままでは和が計算できないので，不等式を用いて分母を統一し，和を計算しましょう．

♣ ♠

解答

(1) 第 $n-1$ 群の末項までの項数は，

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1 \cdots\cdots ①$$

であるから，第 n 群の初項は，$\boldsymbol{a_{2^{n-1}}}$……(答)

さらに，第 n 群の末項までの項数は ① より，2^n-1 であるから，第 n 群の末項は，$\boldsymbol{a_{2^n-1}}$……(答)

(2) **【証明】**

第 n 群の和を S_n とすると，

$$S_n = a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + a_{2^n-1}$$

よって，$a_k = \dfrac{1}{k}$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + a_{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n-1} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n-1}}_{2^{n-1}\text{ 個の項がある}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^n-1} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに，示された．　　　　　　　　　　　　　　　　**(証明終)**

(3) **【証明】**

(2) と同様に考えると，$a_k = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，第 n 群の和 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+2}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^n-1}\right)^2 \\ &< \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}_{2^{n-1}\text{ 個の項がある}} = 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

よって，$S_n < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つので，第 1 群から第 n 群までの和を T_n とすると，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k < \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} < 2$$

ゆえに，示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

◇　　　　　　　　♡

解説

不等式を用いて群数列の和を評価する問題です．基本的に (2), (3) で出てくるような和は計算できません．そこで，分母を統一することを考えます．次の式を見てください．

（ｉ） $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$ ☜ 分母が一番大きい数に統一すると値は小さくなる．

（ii） $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}$ ☜ 分母が一番小さい数に統一すると値は大きくなる．

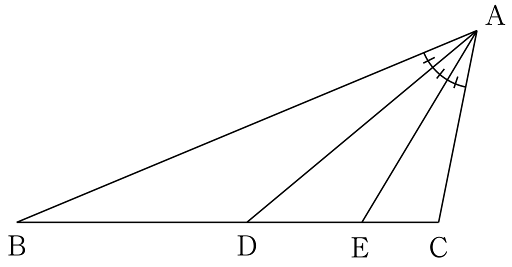
本問では，この事実を用いて式変形を行っています．(2) では結論から $\dfrac{1}{2}$ より大きいことを示したいので，結果的に $S_n > \dfrac{1}{2}$ を示す必要があります．そのため，不等式をより小さい値で評価する必要があるのです．したがって，（ｉ）のように式変形する必要があるので，分母を 2^n-1 に統一しました．(3) は逆に 2 を超えないことを示すので，$T_n < 2$ を導く必要があります．そのため（ii）のように式変形するため分母を 2^{n-1} に統一しました．非常によくある式変形なので，確実にマスターしておきましょう．

$\triangle$ABC において，辺 BC 上に点 D, E があり，AB $= 7$, BE $= 5$, AE $= 3$, $\angle$BAD $=$ $\angle$DAE $=$ $\angle$EAC であるとする．

（1） AD，DE の長さを求めよ．

（2） $\angle$DAE $= \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

（3） EC，CA の長さを求めよ．

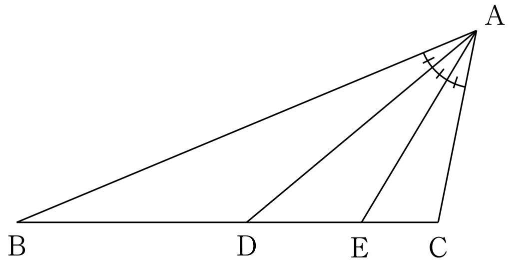


△ABC において，辺 BC 上に点 D, E があり，AB = 7, BE = 5, AE = 3, ∠BAD = ∠DAE = ∠EAC であるとする．

（1） AD ， DE の長さを求めよ．

（2） ∠DAE = θ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

（3） EC ， CA の長さを求めよ．



【テーマ】：角の二等分線

方針

3 つの角が等しいので，どれか 2 つに着目すると角の二等分線の性質が使えます．辺の長さは余弦定理を多用して計算しましょう．

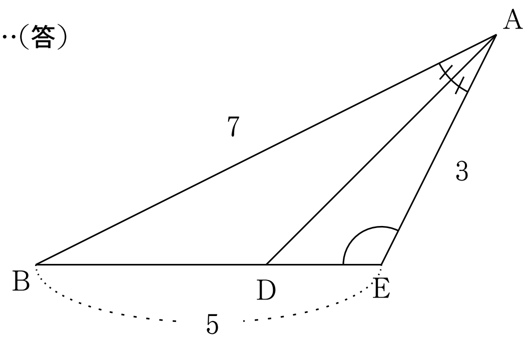
♣ ♠

解答

（1） 角の二等分線の性質より，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DE} = 7:3 \qquad \therefore\ \mathrm{DE} = 5\times\frac{3}{10} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

また，△ABE で余弦定理より，



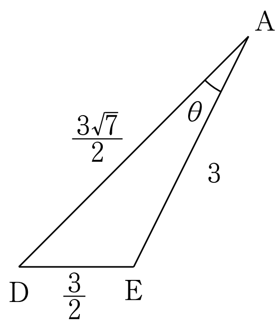
$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AEB} &= \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}\\ &= \frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5}\\ &= \frac{-15}{2\cdot3\cdot5}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって，∠ AEB = 120° である．よって，△ADE で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= 9+\frac{9}{4}-2\cdot\frac{3}{2}\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{45}{4}+\frac{9}{2}\\ &= \frac{63}{4}\end{aligned}$$

AD > 0 より，AD = $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$……(答)

（2） △ADE で余弦定理より，



$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{9+\frac{63}{4}-\frac{9}{4}}{2\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}}\\ &= \frac{9+\frac{54}{4}}{9\sqrt{7}}\end{aligned}$$

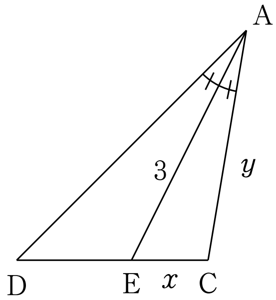
$$= \frac{90}{36\sqrt{7}}$$
$$= \frac{5}{2\sqrt{7}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{14}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　$\mathrm{EC} = x, \mathrm{CA} = y$ とおくと，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AC} = \mathrm{DE} : x \iff \frac{3\sqrt{7}}{2} : y = \frac{3}{2} : x$$

よって，$\dfrac{3}{2}y = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}x$ であるから，$y = \sqrt{7}x$……①

$\triangle\mathrm{AEC}$ で余弦定理より，



$$y^2 = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$
$$7x^2 = 9 + x^2 - 3x$$
$$6x^2 + 3x - 9 = 0 \iff 2x^2 + x - 3 = 0$$
$$\iff (2x+3)(x-1) = 0$$

$x > 0$ より，$x = 1$ である．① より $y = \sqrt{7}$ となるので，

$$\mathrm{EC} = \mathbf{1}, \mathrm{CA} = \boldsymbol{\sqrt{7}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

全体を見る力と部分的な三角形を見る力が必要になります．求めたいものを求めるためには，何がわかればよいかを見抜く力を養っておきましょう．わかっている角や辺を図に記入していき，必要な角や辺を求めるためにはどのようにすればよいかを考えましょう．

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$，$\lim_{n \to \infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，和が具体的に求められないので，不等式を用いて和が求められる式を作り評価します．(2) も同様にしますが，(1) を利用して極限を求めます．

♣ ♠

解答

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

であるから，$k = 1, 2, \cdots, n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \iff \sqrt{n+1} - 1 < \frac{1}{2} a_n$$

$$\therefore \quad a_n > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - 1\right) = \infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \cdots\cdots (\text{答})$$

次に，

$$\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

が成り立つので，$k = 1, 2, \cdots, n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} a_n \cdots\cdots Ⓐ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_n - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < b_n < \frac{1}{\sqrt{2}} a_n$$

$a_n > 0$ であるから，各辺を a_n で割って，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}a_n} + \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}a_n} < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdots\cdots (\text{答})$$

♢ ♡

解説

(1) は，はさみうちの原理ではなく，a_n より小さい数列を作ってその数列が発散することを示すことで a_n の極限を求めます．不等式を立式するのが大変かもしれません．和が求められないタイプの問題は不等式を利用して他の形の極限を計算するという方法を取ることが多いので知っておきましょう．(2) は，(1) の結果を使いますが，こちらははさみうちの原理を利用します．k で成り立つ不等式を作って k の値を $k = 1, 2, \cdots, n$ と変えて辺々を加えると書いていますが，結果的には，$\sum_{k=1}^{n}$ を付けるだけです．Ⓐ の左辺は，$\sum$ を取り直して $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を作っています．そのため余分な項を引いたり，足らない項を足したりする必要が出てきます．

点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

（1） $x+y$

（2） x^4+y^4

（3） x^3+y^3

点 $(x,\ y)$ が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ.

(1)　$x+y$

(2)　x^4+y^4

(3)　x^3+y^3

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の任意の点は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表すことができるので，与えられた式を θ に関する関数にしてとり得る値を求めます.

♣　♠

解答

(1)　$x^2+y^2=1$ 上の任意の点は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表すことができるので，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} x+y &= \cos\theta+\sin\theta \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

であり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9\pi}{4}$ より，

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$　ゆえに，$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x+y\leqq\sqrt{2}}$……**(答)**

(2)　(1) と同様に $x,\ y$ を定めると，

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\ &= 1-2\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \end{aligned}$$

$0\leqq\sin^2 2\theta\leqq 1$ であるから，

$$-\frac{1}{2}\leqq-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\leqq 0 \iff \frac{1}{2}\leqq 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\leqq 1$$

ゆえに，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x^4+y^4\leqq 1}$……**(答)**

(3)　(1) と同様に $x,\ y$ を定めると，

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

ここで，$\cos\theta+\sin\theta=t$ とおくと，(1) より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であり，

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \iff \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

であるから，

$$x^3+y^3=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

よって，$f(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ とおくと，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t^2-1)$ であるから，$f'(t)=0$ のとき，$t=\pm1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(-\sqrt{2})=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{2})+\frac{3}{2}(-\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f(-1)=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}(-1)=-1$$
$$f(\sqrt{2})=-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f(1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$$

よって，$\boldsymbol{-1\leqq x^3+y^3\leqq 1}$**……(答)**

◇ ♡

解説

(1) は，$x+y=k$ とおいて円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-x+k$ が共有点を持つという条件からも範囲を求めることができます．しかし，(2), (3) においては，このようなやり方では求めることが困難なため，円の媒介変数表示 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ を用いて変数を θ 一つにする必要があります．入試問題には，このように 2 変数を媒介変数や置き換えなどによって 1 変数にしなければ解けないという問題が多いので，この類の問題演習はしっかりと積んでおきましょう．

（1） $\log_5 3$ は無理数であることを示せ.

（2） $\log_{10} r$ が有理数となる有理数 r は $r = 10^q$ $(q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ に限ることを示せ.

（3） 任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$ は無理数であることを示せ.

（1） $\log_5 3$ は無理数であることを示せ．

（2） $\log_{10} r$ が有理数となる有理数 r は $r = 10^q$（$q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$）に限ることを示せ．

（3） 任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$ は無理数であることを示せ．

【テーマ】：背理法による証明

方針

無理数であることを示す場合は，有理数とおいて矛盾を導きます．有理数とは $\dfrac{n}{m}$（$m,\ n$ は互いに素な整数で，$m \neq 0$）の形に表せる数のことです．

♣　♠

解答

（1）**【証明】**

$\log_5 3$ が有理数であると仮定すると，

$$\log_5 3 = \frac{n}{m} \quad (m,\ n \text{ は互いに素な整数で，} m \neq 0)$$

とおくことができる．このとき，$3 = 5^{\frac{n}{m}} \iff 3^m = 5^n$ であるが，右辺は 5 の倍数であるが 3 の倍数にはならないので，矛盾．ゆえに，$\log_5 3$ は無理数であることが示された．　**（証明終）**

（2）**【証明】**

真数条件より $r > 0$ であり，$\log_{10} r = \pm\dfrac{n}{m}$（$n$ は 0 以上の整数で，m を自然数，$m,\ n$ は互いに素）と表すことができる．

（ i ） $\log_{10} r = \dfrac{n}{m}$ のとき，

$$r = 10^{\frac{n}{m}} \quad \iff \quad r^m = 10^n \cdots\cdots ①$$

ここで，r は正の有理数であるから，$r = \dfrac{t}{s}$ ……②（$s,\ t$ は互いに素な正の整数で，$t \neq 0$）と表すことができる．よって，

$$\frac{t^m}{s^m} = 10^n \quad \iff \quad t^m = s^m 10^n$$

となるので，s は t^m の正の約数であるが，$s,\ t$ は互いに素な正の整数であるから $s = 1$ である．よって，

$$t^m = 10^n \quad \iff \quad t^m = 2^n \cdot 5^n$$

と素因数分解することができる．また，この式の両辺の素因数の個数が一致するためには，t が含んでいる素因数 2 と 5 の個数も等しくその個数を q とおくと，

$$t = 2^q \cdot 5^q = 10^q$$

であるから，$s = 1$ であることと ② より，$r = 10^q$ となる．

（ii） $\log_{10} r = -\dfrac{n}{m}$ のとき，

$$\frac{1}{r} = 10^{\frac{n}{m}}$$

となるが，r が有理数であることから $\dfrac{1}{r}$ も有理数となるので，① と同じである．よって，(i) と同様の議論で $r=10^{-q}$ と表される．以上より，題意は示された．

（証明終）

(3) **【証明】**

$1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ である．ここで，与えられた数が有理数であると仮定すると，(2) より

$$\frac{3^{n+1}-1}{2}=10^q \quad (q>0)$$

と表すことができる．この式を変形すると，

$$3^{n+1}-1=2\cdot 10^q \quad\Longleftrightarrow\quad 3^{n+1}+(10^q-1)=3\cdot 10^q$$

となる．$n \geqq 1$ であり，$q>0$ であることから 3^{n+1}, 10^q-1 はともに 9 の倍数となるので，左辺は 9 の倍数である．ところが右辺は 9 の倍数ではないので矛盾．ゆえに，与えられた数は無理数であることが示された．

（証明終）

◇ ♡

解説

無理数の証明に背理法を使うのは，常套手段といってもよいでしょう．(1) はできるようになっておかなければいけない基本問題です．(2) に関しては，$\log_{10} r$ が有理数となることを前提に使ってよいのですからこれを分数で表すことから始めます．注意したいのは，負の数を忘れないようにすることです．議論としては，正の場合と負の場合に分けて，正の場合を先に示しておけば符号が違うだけなので，負の場合は同様の議論で示すことができます．(3) は (2) の結果を使って無理数であることを示すので，再び背理法を用います．

定数 a に対して，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}$ の $x \geqq 1$ の部分を $C(a)$ とおく．

（1） $C(a)$ が直線 $y=x$ の下部 $y<x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ．

（2） $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$C(a_0)$ と 3 直線 $y=x$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ．

（3） $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ を求めよ．

定数 a に対して，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}$ の $x \geqq 1$ の部分を $C(a)$ とおく．

(1)　$C(a)$ が直線 $y=x$ の下部 $y<x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ．

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$C(a_0)$ と 3 直線 $y=x$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，定数分離をして関数 $f(x)$ のとり得る値を求めるという問題に帰着することができます．(2) は，置換積分をうまく利用しましょう．

解答

(1)　$\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}<x \iff a<x^2-x\sqrt{x^2-1}$ であるから，

$f(x)=x^2-x\sqrt{x^2-1}$ とおくとき，$f(x)$ のとり得る値の範囲を求める．$x>1$ において，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x-\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{2x}{2x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x^2-1}-(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{4x^4-4x^2}-\sqrt{4x^4-4x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}<0 \end{aligned}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは単調減少である．

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

また，$f(1)=1$ であるから，$\dfrac{1}{2}<f(x)\leqq 1$ となる．ゆえに，実数 a の最大値 a_0 の値は，$\boldsymbol{a_0=\dfrac{1}{2}}$ ……**(答)**

(2)　(1) より $1\leqq x\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$ で $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ のグラフは $0<y<x$ にあるので，求める体積は，

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2x}\right)^2\right\}dx \\ &= \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left(x^2-1+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{4x^2}\right)\right\}dx \\ &= \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(1-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4x^2}\right)dx \text{ …… ①} \end{aligned}$$

ここで，

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,dx$$

であるから，$\dfrac{1}{x}=\cos t$ とおくと，$x=\dfrac{1}{\cos t}$ となることから，$dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$ であり，

x	$1 \to \dfrac{1}{\cos\theta}$
t	$0 \to \theta$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,dx &= \int_0^{\theta}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_0^{\theta}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt\\ &= \Big[\tan t-t\Big]_0^{\theta}=\tan\theta-\theta\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，①, ② より

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\pi\left[x+\frac{1}{4x}\right]_1^{\frac{1}{\cos\theta}}-\pi(\tan\theta-\theta)\\ &=\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-1-\frac{1}{4}-\tan\theta+\theta\right)\\ &=\boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

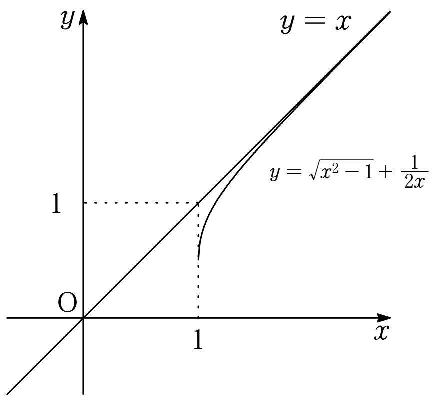
(3)　(2) の結果から，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}V(\theta) &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right)\\ &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta\right)\\ &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta\right)\\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇　　　♡

解説

まず $y<x$ を満たすという条件から $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}<x$ を得ますが，このままでは a が式に埋もれているので a の最大値を求めるのは困難です．そこで，a を左辺に残すための式変形を行います．（これが定数分離です）次に，常に成り立つようにしなければならないので，$f(x)$ の最小値よりも a の値が小さければよいという条件から a の最大値を求めることになります．実際に $f(x)$ の最小値は存在しませんが，$\dfrac{1}{2}<f(x)$ という条件が導かれるので，a が $\dfrac{1}{2}$ 以下であれば必ず不等式が成立することがわかります．(2) では，ちょっとグラフが想像しにくいかもしれませんが，(1) の結果から $1\leqq x\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$ の間で $y<x$ が成り立っていることがわかるので，グラフがかけなくても立式することはできます．参考までに，$y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2x}$ のグラフをかくと右図のようになります．実際に計算するとわかりますが，$x\to\infty$ のとき，$y=x$ が漸近線になります．



平面上に 3 つの放物線

$$C_1 : y = -x(x-1),\quad C_2 : y = x(x-1),\quad C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

を考える．いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする．

（1） a, b を t を用いて表せ．

（2） 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ．

（3） t を動かすとき，S の最小値を求めよ．

平面上に 3 つの放物線

$$C_1: y=-x(x-1),\quad C_2: y=x(x-1),\quad C: y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$$

を考える．いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする．

（1） a, b を t を用いて表せ．

（2） 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ．

（3） t を動かすとき，S の最小値を求めよ．

【テーマ】：3 次関数のグラフで囲まれた面積の最小値

方針

(1) は共通接線の問題です．(2) は面積を求める問題ですが，交点の x 座標がきれいな値にならないので，文字で代用しましょう．

♣ ♠

解答

(1) $f(x)=-x(x-1)$，$g(x)=x(x-1)$，$h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ とおくと，題意より，

$$\begin{cases} f(t)=h(t) & \cdots\cdots ① \\ f'(t)=h'(t) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．① より，

$$-t(t-1)=\frac{1}{2}t^2+at+b \iff \frac{3}{2}t^2+(a-1)t+b=0 \cdots\cdots ①'$$

また，$f'(x)=-2x+1$，$h'(x)=x+a$ であるから，② より，

$$-2t+1=t+a \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=-3t+1}\cdots\cdots\text{(答)}$$

①′ より，

$$\frac{3}{2}t^2-3t^2+b=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{b=\frac{3}{2}t^2}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) (1) より，$h(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\dfrac{3}{2}t^2$

$y=g(x)$ と $y=h(x)$ のグラフの交点の x 座標は，

$$x^2-x=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2 \iff x^2+2(3t-2)x-3t^2=0$$

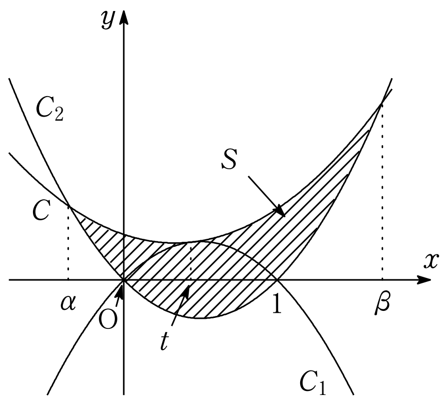
この方程式の判別式を D とすると，

$$D=(3t-2)^2+3t^2>0$$

となるので，必ず異なる 2 つの実数解をもつ．その実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より，

$$\left.\begin{cases} \alpha+\beta=-2(3t-2) \\ \alpha\beta=-3t^2 \end{cases}\right. \cdots\cdots ③$$

であり，面積 S は，



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{h(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，③ より，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=4(3t-2)^2+12t^2$$
$$=16(3t^2-3t+1)$$

$\beta-\alpha>0$ より，$\beta-\alpha=4(3t^2-3t+1)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$S=\frac{1}{12}\cdot 64(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{16}{3}(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　(2) より，

$$S=\frac{16}{3}(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{16}{3}\left\{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

よって，$t=\frac{1}{2}$ のとき，S は最小となり，その最小値は $\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(**答**)

◇　♡

解説

(1) は，共通接線の問題で $y=f(x)$ と $y=h(x)$ が $x=t$ において共通な接線を持つための条件は，

$$\begin{cases} f(t)=h(t) & \cdots\cdots\ ① \\ f'(t)=h'(t) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

です．① は通る点が同じである条件で，② は接線の傾きが同じである条件です．直線の方程式は，傾きと通る点で決まるので，この 2 条件があれば十分です．

(2) は，面積を求める問題ですが，2 曲線の交点がきれいな形で求められません．このような場合は，一般に文字で代用するという手段を取ります．放物線と放物線で囲まれる部分の面積は公式で求められるので，文字で代用することで計算の方針が見やすくなるはずです．

(3) は，おまけのような問題で，(2) で求めた S の最小値は，2 次式部分の最小値を求めればよいので，平方完成するだけです．

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n - \frac{n}{(n+1)!} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1） 一般項 a_n を求めよ．

（2） 2 以上の自然数 m に対して $\sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{m-k}$ を求めよ．

（3） 不等式 $\dfrac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \dfrac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n-\frac{n}{(n+1)!}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　2 以上の自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}a_ka_{m-k}$ を求めよ．

(3)　不等式 $\dfrac{(a_n)^2}{a_{2n}}<\dfrac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，予想して数学的帰納法で証明するという方法もありますが，うまく式変形することができれば，容易に求められます．(2) は，二項定理が使えるかどうかがポイントになります．(3) は，数学的帰納法で証明しましょう．

♣ ♠

解答

(1)　$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{n+1-1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$ であるから，与えられた漸化式を変形すると，

$$a_{n+1}=a_n-\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\iff a_{n+1}-\frac{1}{(n+1)!}=a_n-\frac{1}{n!}$$

となるので，

$$a_n-\frac{1}{n!}=a_1-\frac{1}{1!}=0\qquad \therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{1}{n!}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$m\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(m-k)!}&=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k)!}\\&=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_k\\&=\frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m\right)\\&=\frac{1}{m!}\left((1+1)^m-2\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2^m-2}{m!}\ (m\geqq 2)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3)　**【証明】**

$$\frac{(a_n)^2}{a_{2n}}<\frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}\ \cdots\cdots ①$$

数学的帰納法で証明する．

(ｉ)　$n=1$ のとき，$a_1=1,\ a_2=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$(\text{左辺})=2,\quad(\text{右辺})=\frac{4}{\sqrt{3}}>2$$

であるから，① は成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき，すなわち

$$\frac{(a_k)^2}{a_{2k}}<\frac{4^k}{\sqrt{2k+1}}\iff\frac{(2k)!}{(k!)^2}<\frac{4^k}{\sqrt{2k+1}}\ \cdots\cdots ②$$

が成り立つと仮定する．② の両辺に $\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} > 0$ をかけて，

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{2 \cdot 4^k \sqrt{2k+1}}{k+1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}} - \frac{2 \cdot 4^k \sqrt{2k+1}}{k+1} &= \frac{2 \cdot 4^k \left\{2(k+1) - \sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}\right\}}{\sqrt{2k+3}(k+1)} \\ &= \frac{2 \cdot 4^k \left(\sqrt{4k^2+8k+4} - \sqrt{4k^2+8k+3}\right)}{\sqrt{2k+3}(k+1)} > 0 \end{aligned}$$

となるので，

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2} < \frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$

が成り立ち，$n = k+1$ のときも ① は成り立つ．

以上より，数学的帰納法によってすべての自然数 n に対して ① が成り立つことが示された．　**（証明終）**

◇ ♡

解説

（1）は，予想して帰納法で証明する方法や解答のように式変形する方法，さらには $\{a_n\}$ の階差数列を考える方法など様々な方法があります．

（2）は，式の形から二項定理が想像できたかどうかがポイントになります．

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

なので，$a = b = 1$ として

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$$

を得ることができます．

（3）は，数学的帰納法で証明しますが，$n = k+1$ のとき成り立つことを示す際に計算がやや複雑なので，計算ミスと解答の書き方に注意しましょう．

n を正の整数とする．座標平面上の点 $(0,\ -1)$ から曲線 $C_n : y = n(\log x)^2$ に引いた接線の中で，接点の x 座標が最も小さいものを考え，その接点の x 座標を a_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す.

(1)　$\lim_{n \to \infty} a_n$ および $\lim_{n \to \infty} n \log a_n$ の値を求めよ.

(2)　曲線 C_n，直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S_n を n と a_n を用いて表せ.

(3)　$\lim_{n \to \infty} n(a_n - 1)$ の値を求めよ.

n を正の整数とする．座標平面上の点 $(0,\ -1)$ から曲線 $C_n : y = n(\log x)^2$ に引いた接線の中で，接点の x 座標が最も小さいものを考え，その接点の x 座標を a_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す．

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ および $\lim\limits_{n\to\infty} n\log a_n$ の値を求めよ．

（2） 曲線 C_n ，直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S_n を n と a_n を用いて表せ．

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$ の値を求めよ．

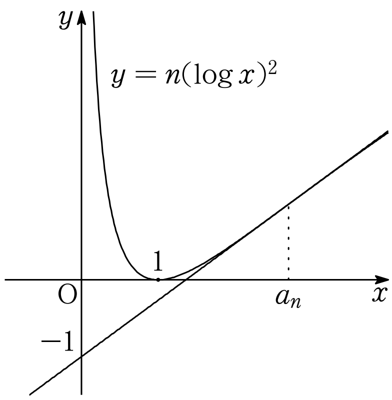
【テーマ】：微分法の応用と数列の極限

方針

(1) は，接線が点 (0, −1) を通るという情報から $\log a_n$ を求めることができます．まずは，この極限を考えましょう．(2) は素直に面積を計算しますが，答えの形はできるだけ簡単になるようにすると (3) で方針を立てやすくなります．

♣ ♠

解答



（1） $y' = 2n(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$ より，接線の方程式は，

$$y = \frac{2n\log t}{t}(x-t) + n(\log t)^2$$
$$= \frac{2n\log t}{t}x - 2n\log t + n(\log t)^2$$

これが，点 (0, −1) を通るとき，

$$-1 = -2n\log t + n(\log t)^2$$
$$n(\log t)^2 - 2n\log t + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

よって，

$$\log t = \frac{n \pm \sqrt{n^2-n}}{n}$$

題意より，$\log a_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2-n}}{n}$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-n}}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$
$$= 0$$

ゆえに，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}$……(答)

さらに，

$$\lim_{n\to\infty} n\log a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　求める面積 S_n は，

$$S_n = \int_1^{a_n} n(\log x)^2\,dx \cdots\cdots ②$$
$$= \Big[\,nx(\log x)^2\,\Big]_1^{a_n} - \int_1^{a_n} nx\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n\int_1^{a_n}\log x\,dx$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n\Big[\,x\log x - x\,\Big]_1^{a_n}$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n(a_n\log a_n - a_n + 1)$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2na_n\log a_n + 2na_n - 2n$$

$\log a_n$ は ① より，$n(\log a_n)^2 = 2n\log a_n - 1$ を満たすので，

$$S_n = a_n(2n\log a_n - 1) - 2na_n\log a_n + 2na_n - 2n$$
$$= \boldsymbol{(2n-1)a_n - 2n}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　(2) より，$S_n = 2n(a_n - 1) - a_n$ と変形できて，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ より ② から } \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2n(a_n - 1) - \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$0 = 2\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) - 1$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇　♡

解説

(1) では，a_n ではなく $\log a_n$ を求めます．直接 a_n を求めても構いませんが，$\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n$ を求めて真数部分の極限を求める手法は大切です．後半は，分子の有理化を行えば不定形が回避できます．

(2) では，具体的に S_n を求めることができるので，部分積分法を 2 回使って S_n を計算しましょう．ただ，途中で $(\log a_n)^2$ が出てくるので，(1) の結果を使って次数を下げておいた方が式がシンプルになるので，減点を避けるためにも形をきれいに整理しておきましょう．

(3) では，(2) で式がきれいに整理できていないと $n(a_n-1)$ の形が出てこないため方針が立てられません．(1) で求めた極限値を利用することで $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$ を求めることができます．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ を証明せよ.

(2) $0<x<\pi$ のとき $x-\sin x<x(1-\cos x)$ が成り立つことを証明せよ.

(3) $a>0$ とする．曲線 $y=\sqrt{x+a}\sin\dfrac{x}{a}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする．$V(a)$ の値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ.

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ を証明せよ.

（2）　$0<x<\pi$ のとき $x-\sin x<x(1-\cos x)$ が成り立つことを証明せよ.

（3）　$a>0$ とする．曲線 $y=\sqrt{x+a}\sin\dfrac{x}{a}$ $(0\leqq x\leqq1)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする．$V(a)$ の値を求めよ.

（4）　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ.

【テーマ】：回転体の体積

方針

(2) では，$f(x)=x(1-\cos x)-(x-\sin x)$ とおいて $f(x)>0$ を示します．(3) は，部分積分法を用いて体積を計算し，(4) で (1) の結果を用いて極限値を計算します.

♣　♠

解答

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$……(**答**)

（2）　**【証明】**

$f(x)=x(1-\cos x)-(x-\sin x)$ とおくと，$f(x)=-x\cos x+\sin x$ より，

$$f'(x)=-\cos x+x\sin x+\cos x=x\sin x>0\quad(\because\ \ 0<x<\pi)$$

よって，$f(x)$ は単調増加である．$f(0)=0$ であるから，$0<x<\pi$ で $f(x)>0$ となり，示された. (**証明終**)

（3）　$0\leqq x\leqq1$ において，$y\geqq0$ であるから，

$$\begin{aligned}V(a)&=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x+a}\sin\frac{x}{a}\right)^2dx\\&=\pi\int_0^1(x+a)\sin^2\frac{x}{a}\,dx\\&=\pi\int_0^1(x+a)\frac{1-\cos\frac{2}{a}x}{2}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x+a)\left(1-\cos\frac{2}{a}x\right)dx\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&\int_0^1(x+a)\left(1-\cos\frac{2}{a}x\right)dx\\&=\left[\,(x+a)\left(x-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}x\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}x\right)dx\\&=(1+a)\left(1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}\right)-\left[\,\frac{1}{2}x^2+\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}x\right]_0^1\\&=(1+a)\left(1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\right)\\&=1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}+a-\frac{a^2}{2}\sin\frac{2}{a}-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\\&=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\end{aligned}$$

ゆえに，求める回転体の体積は，

$$\boldsymbol{V(a)=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\right\}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4)　(3) より，

$$\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\right\}$$

ここで，$t=\dfrac{2}{a}$ とおくと，$a\to\infty$ のとき，$t\to+0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}V(a)&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-\frac{1}{t}\left(1+\frac{2}{t}\right)\sin t-\frac{\cos t}{t^2}\right\}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2t-(t+2)\sin t}{t^2}\right\}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2(t-\sin t)-t\sin t}{t^2}\right\}\cdots\cdots Ⓐ\end{aligned}$$

ここで，$a\to\infty$ のとき，$t\to+0$ より $0<t<\pi$ で (2) で示した不等式から，

$$\begin{aligned}0\leqq\lim_{a\to\infty}V(a)&<\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2t(1-\cos t)-t\sin t}{t^2}\right\}\cdots\cdots Ⓑ\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+2\cdot\frac{1-\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+2\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}-\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1\right)=0\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理より，$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty}V(a)=0}\cdots\cdots(\textbf{答})$

◇ ♡

解説

(1), (2) は基本問題ですから，完答しましょう．(3) は計算がやや複雑なので，計算ミスに注意しましょう．部分積分法を用いますが，答えがあまりきれいにまとまらないので，適当なところで整理しておきましょう．(4) は，(1), (2) の結果を用いて極限値の計算をします．まずは，置き換えを行って (1) が使える形を作ることから始めます．
このような問題の流れは，入試では頻出です．出題者の意図をくみとって解答を作成することは大切ですから，(1), (2) の結果をどこで使ったかを明記する方が印象がよいでしょう．

Ⓐ から Ⓑ への式変形では (2) を用います．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{t-\sin t}{t^2}$ は不定形なので，このまま答えを出すことはできません．したがって，(2) の不等式を用いて

$$\frac{t-\sin t}{t^2}<\frac{t(1-\cos t)}{t^2}$$

と式変形しているのです．

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする．n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

（1） $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

（2） $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ．

（3） $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ．

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする．n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

(1) $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

(2) $p(1002)-p(1001)$ の値を求めよ．

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1)-p(n)$ の値を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

500 回連続で表が出れば終了するので，終了する 501 回前は必ず裏が出ていなければいけません．そのことに着目することがポイントです．

解答

(1) **【証明】**

$501 \leqq n \leqq 1000$ を満たす n に対し，$n-500$ 回目に裏が出て，次からの 500 回で続けて表が出れば n 回目で試行は終了するので，求める確率は，

$$p(n)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{501}}\cdots\cdots\text{(答)}$$

また，これより $p(n)$ は一定であることも示された．　**(証明終)**

(2) $n=1001$ で試行が終了するとき，500 回で試行が終了せず 501 回目で裏が出て，502〜1001 までの 500 回すべてが表であればよいので，

$$p(1001)=(1-p(500))\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=(1-p(500))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

また，$n=1002$ で試行が終了するとき，501 回で試行が終了せず 502 回目で裏が出て，503〜1002 までの 500 回すべてが表であればよいので，

$$p(1002)=(1-p(500)-p(501))\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=(1-p(500)-p(501))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

したがって，

$$\begin{aligned}p(1002)-p(1001)&=(1-p(500)-p(501))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}-(1-p(500))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\\&=-p(501)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\\&=\boldsymbol{-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}}\cdots\cdots\text{(答)}\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

(3) (2) と同様に考える．$1002 \leqq n \leqq 1500$ を満たす n に対して，n 回目に試行が終了するときは，$n-501$ 回で試行が終了せず $n-500$ 回目で裏が出て，次の 500 回がすべて表であればよいので，

$$p(n)=\left(1-\sum_{k=500}^{n-501}p(k)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$$

ゆえに，

$$p(n+1)-p(n)=\left(1-\sum_{k=500}^{n-501}p(k)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}-\left(1-\sum_{k=500}^{n-500}p(k)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$
$$=-p(n-500)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$
$$=-\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)^{\mathbf{1002}}\cdots\cdots(\text{答})\quad(\because\ (1))$$

◇ ♡

解説

(1) で問題の仕組みを理解する必要があります．500 回連続表が出るということなので，肝心なのは終了する 501 回前に裏が出ていなければならないということです．それ以前は 500 回連続で表が出なければ何が出てもよいということがポイントになります．$501 \leqq n \leqq 1000$ のときは，終了する 501 回目以前は試行が 499 回以下なので，表が 500 回連続で出る心配がないため考える必要がありません．したがって，確率は同じになるというわけです．問題は $n \geqq 1001$ のときです．こうなると終了する 501 回目以前は試行が 500 回以上になりますから，表が 500 回連続で出ないときを考えなければなりません．(2) で取り上げられている $n=1002$ のときに着目して考えてみましょう．試行が終了する 501 回前にあたるのは，502 回目ですから，このときは裏が出なければいけません．さて，このままでは 1 回目〜 501 回目までに表が 500 回連続して出る可能性がありますからその場合を除外する必要があります．解答中でも書いてありますが，501 回までに試行が終了しない確率を求めるということです．試行が終了する可能性があるのは，500 回目と 501 回目で，それぞれ試行が終了する確率は $p(500)$，$p(501)$ ですから，この場合を全体から除けば 501 回までに試行が終了しない確率が求められます．したがって，その確率は

$$1-p(500)-p(501)$$

になります．これを一般化して考えれば (3) はそれほど難しくないでしょう．ここで，注意してもらいたいのは，(3) で $1002 \leqq n \leqq 1500$ となっているのは，$p(n-500)$ の確率が (1) の結果から $\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ になることを用いるためです．$n \geqq 1501$ になると，(2) の様子を見てもわかるように状況が変わってくる点に注意しておきましょう．

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする．すなわち，

$$A = \{4k+1 \mid k \text{ は 0 以上の整数 }\}$$

とする．次の問いに答えよ．

（1） x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ．

（2） 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ．

（3） m, n を 0 以上の整数とする．$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ．

（4） m, n を 0 以上の整数とする．$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ．

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする．すなわち，

$$A=\{4k+1 \mid k \text{ は 0 以上の整数}\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ．

(2) 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ．

(3) m, n を 0 以上の整数とする．$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ．

(4) m, n を 0 以上の整数とする．$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ．

【テーマ】：整数問題

方針

剰余に着目して考えます．合同式を知っていると解答が楽に進められるでしょう．

解答

(1) **【証明】**

l, m を 0 以上の整数とすると，$x\in A, y\in A$ より，

$$x=4l+1,\ \ y=4m+1$$

と置けるので，

$$xy=(4l+1)(4m+1)=4(4lm+2l+2m)+1$$

となり，$4lm+2l+2m$ が 0 以上の整数であることから xy は 4 で割ると 1 余る．
したがって，$xy\in A$ となり，題意は示された．　**(証明終)**

(2) **【証明】**

k を 0 以上の整数として，$m=2k$ とおく．ここで，整数 a, b を 4 で割った余りが等しいとき，$a\equiv b$ と書くこととすると，

$$3^m=3^{2k}=9^k=(8+1)^k\equiv 1^k=1$$

が成り立つ．よって，3^m を 4 で割ると 1 余るので，$3^m\in A$ となり，題意は示された．　**(証明終)**

(3) **【証明】**

k を 0 以上の整数として，(2) と同様に考えて計算する．

(i) $m+n=2k$ のとき，

$$3^m7^n=3^m(4+3)^n\equiv 3^m3^n=3^{m+n}=3^{2k}$$

よって，(2) の結果から $3^{m+n}\in A$ となる．

(ii) $m+n=2k+1$ のとき，

$$3^m7^n\equiv 3^{m+n}=3^{2k+1}=3\cdot 3^{2k}\equiv 3 \quad (\because\ (2))$$

よって，$3^{m+n} \in A$ となる．

ゆえに，題意は示された．（証明終）

(4)　$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の約数は，

$$(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2m+1})(7^0+7^1+7^2+\cdots+7^{2n+1})$$

を展開したときの項として現れる．よって，(3) の結果から A の要素となる項の和は，偶数乗同士，奇数乗同士をかけたものを加えればよいことがわかる．したがって，求める和は，

$$\begin{aligned}
&(3^0+3^2+\cdots+3^{2m})(7^0+7^2+\cdots+7^{2n})+(3^1+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7^1+7^3+\cdots+7^{2n+1})\\
&=\frac{(3^2)^{m+1}-1}{3^2-1}\cdot\frac{(7^2)^{n+1}-1}{7^2-1}+\frac{3((3^2)^{m+1}-1)}{3^2-1}\cdot\frac{7((7^2)^{n+1}-1)}{7^2-1}\\
&=\frac{(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{8\cdot 48}+\frac{21(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{8\cdot 48}\\
&=\boldsymbol{\frac{11(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{192}}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

◇　♡

解説

余りに着目する問題です．複雑そうに見えますが，問われていることはそれほど難しくなく基本的な問題です．ただし，(4) の問題は，約数の総和を求める問題を経験しておく必要があります．一般に素因数分解された数 $2^a3^b5^c\cdots$ の約数の総和は，次式で求められます．

$$(2^0+2^1+\cdots+2^a)(3^0+3^1+\cdots+3^b)(5^0+5^1+\cdots+5^c)\cdots$$

これを知っていることと，(3) の結果が生かせればあとは数列の問題になります．

(2), (3) では合同式を用いて解答しました．解答中では，「整数 a, b を 4 で割った余りが等しいとき，$a\equiv b$ と書くこととする．」としましたが，一般に，整数 a, b を n で割った余りが等しいとき，$a\equiv b \pmod n$ と書きます．この合同式の性質としては，次のようなものがあります．

a, b, c, d を整数，n, m を自然数とするとき，$a\equiv b \pmod n$ かつ $c\equiv d \pmod n$ が成り立つとき，次の関係式が成り立つ．

（i）$a+c\equiv b+d \pmod n$　（ii）$a-c\equiv b-d \pmod n$

（iii）$ac\equiv bd \pmod n$　（iv）$a^m\equiv b^m \pmod n$

合同式は加法・減法・乗法に関しては，＝（イコール）の場合と同じ関係が成り立つ．

x, a, b, n を自然数とするとき，次の合同式が成り立つ．

$$(ax+b)^n\equiv b^n \pmod x$$

証明は，二項定理を用いて行います．考え方を学ぶのにちょうどよいので，ぜひやってみてください．

$a>0$ は定数，θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動く変数とする．xyz 空間で $(a\cos\theta,\, a\sin\theta,\, 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする．さらに，S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1, S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする．

(1)　S_1 の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ．

(2)　S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき，$V(\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

$a>0$ は定数，θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動く変数とする．xyz 空間で $(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする．さらに，S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1, S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする．

(1)　S_1 の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ．

(2)　S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき，$V(\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

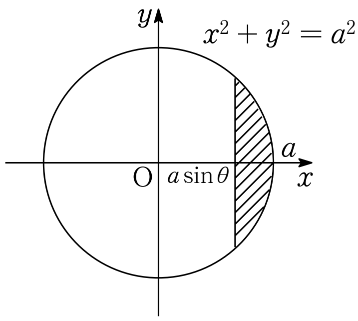
(1) は，求めたい体積を別の回転体に置き換えます．(2) は，(1) を利用すれば方針は容易に立つでしょう．

♣　♠

解答

(1)　S を xy 平面で切り取ったときにできる切断面は，中心 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)$ で，半径 a の円である．したがって，S_1 は，xy 平面において中心が原点で半径 a の円において，下図斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積と一致する．よって，

$$\begin{aligned}V_1(\theta)&=\int_{a\sin\theta}^{a}\pi y^2\,dx\\&=\pi\int_{a\sin\theta}^{a}(a^2-x^2)\,dx\\&=\pi\left[\,a^2x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_{a\sin\theta}^{a}\\&=\pi\left(a^3-\frac{1}{3}a^3-a^3\sin\theta+\frac{1}{3}a^3\sin^3\theta\right)\\&=\boldsymbol{\frac{a^3\pi}{3}\left(\sin^3\theta-3\sin\theta+2\right)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



(2)　(1) と同様に考えると，S_2 は，$x^2+y^2=a^2$ と直線 $x=a\cos\theta$ によって囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積と一致する．よって，

$$\begin{aligned}V_2(\theta)&=\pi\int_{a\cos\theta}^{a}(a^2-x^2)\,dx\\&=\frac{a^3\pi}{3}\left(\cos^3\theta-3\cos\theta+2\right)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\frac{4\pi}{3}a^3-V_1(\theta)-V_2(\theta)\\&=\frac{4\pi}{3}a^3-\frac{\pi}{3}a^3\left(\sin^3\theta-3\sin\theta+2+\cos^3\theta-3\cos\theta+2\right)\\&=\frac{\pi}{3}a^3\left\{-\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)+3\left(\sin\theta+\cos\theta\right)\right\}\end{aligned}$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

であるから，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ となる．したがって，$1<t\leqq\sqrt{2}$ を得る．

一方，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}t\\&=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\frac{\pi}{3}a^3\left(\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+3t\right)\\&=\frac{\pi}{6}a^3(t^3+3t)\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=t^3+3t$ とおくと，$f'(t)=3t^2+3>0$ であるから，$t=\sqrt{2}$ で $f(t)$ は最大値をとる．
ゆえに，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$V(\theta)$ は最大値

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}a^3(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi a^3}\cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，そのまま計算をすると大変なので，同じ体積で計算が簡単な場合に置き換えることがポイントです．円や球がらみの問題では，大切な考え方です．ただし，もともとの図形を 90° 回転させて考えているので，積分区間が $a\cos\theta\leqq x\leqq a$ ではなく，$a\sin\theta\leqq x\leqq a$ となる点に注意しましょう．

(2) は，S_2 の体積も (1) と同じ計算をすれば求まるので，容易に計算できます．実際は $\sin\theta$ が $\cos\theta$ に変わるだけなので，計算の必要はありません．$V(\theta)$ が求まれば，$t=\sin\theta+\cos\theta$ と置き換えをして t の 3 次式に帰着させることは非常によく行う変形なので，確実にできるようにしておきましょう．

四面体 OAPQ において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle \mathrm{PAQ} = 30^\circ$ である．

（1） △APQ の面積 S を求めよ．

（2） $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ のとりうる範囲を求めよ．

（3） 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ．

四面体 OAPQ において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle \mathrm{PAQ} = 30^\circ$ である．

(1) $\triangle$APQ の面積 S を求めよ．

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ のとりうる範囲を求めよ．

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ．

【テーマ】：四面体の体積

方針

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ なので，O を原点にとれば，A, P, Q は xyz 空間内において軸上に取ることができるので，座標を設定します．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，3 点 A, P, Q を xyz 空間において

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{P}(x,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ y,\ 0)$$

とおくことができる．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ のなす角が 30° より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \cos 30^\circ$$

$$(x,\ 0,\ -1) \cdot (0,\ y,\ -1) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots ①$$

ゆえに，

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = x$ より，x のとり得る値の範囲を求める．① より，

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = \frac{4}{3} \cdots\cdots ②$$

であるから，

$$y^2 = \frac{4}{3(x^2+1)} - 1$$

であり，$y^2 > 0$ より，

$$\frac{4}{3(x^2+1)} - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{3}$$

$x > 0$ より，$0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．したがって，$\boldsymbol{0 < \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdots\cdots(\text{答})$

(3) $V = \dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{OPQ} \cdot \mathrm{OA} = \dfrac{1}{6}xy$ である．ここで，② より，

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + x^2y^2 = \frac{1}{3}$$

であり，$x^2 > 0$, $y^2 > 0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$x^2 + y^2 \geqq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$$

等号は $x=y$ のとき，すなわち ② より，

$$(x^2+1)^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ x^2=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

となるので，等号が成立する x, y の値は存在する．よって，

$$x^2+y^2 \geqq 2xy \iff x^2+y^2+x^2y^2 \geqq 2xy+x^2y^2$$

であるから，

$$\frac{1}{3} \geqq 2xy+x^2y^2 \iff 3(xy)^2+6xy-1 \leqq 0$$

ゆえに，

$$\frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leqq xy \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

となり，$xy>0$ より，

$$0<xy \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \qquad \therefore\ 0<V \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{18}$$

を得るので，V の最大値は，$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{18}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

本問のポイントは，座標空間内に四面体を置くことにあります．その理由は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

という条件があるからです．(1) は，情報が少なく戸惑うかもしれませんが，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ の値を一つとみなすことができたかどうかが鍵となります．(2) は (1) で座標を設定していれば，方針も立てやすいでしょう．(3) は，相加平均・相乗平均の関係を用いているので，等号成立条件を忘れずに書いておきましょう．等号はいつも成り立つとは限りませんから，これがないと減点対象となります．また，別解として $x^2+1=t$ と置くことで，

$$y^2=\frac{4}{3t}-1$$

と表せるので，x, y の 2 変数を t の 1 変数にすることもできます．ただし，その際新しく置いた文字 t の範囲が $t>1$ であることも述べておきましょう．

m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする．

(1)　方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ．また，その値を c とするとき，$m - 1 < c < m$ となることを示せ．

(2)　$x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ．

(3)　a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ．

m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする．

(1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ．また，その値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ．

(2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ．

(3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ．

【テーマ】：微分法と極限値

方針

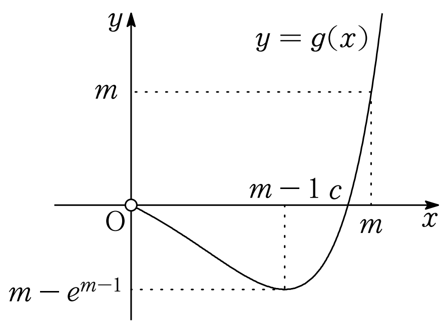
(1) は，左辺を $g(x)$ とおいて $y = g(x)$ の増減を調べます．(2) は，(1) の結果を用いて示します．(3) では，直接極限を求めることは困難なので，式変形の途中ででてくる $\dfrac{\log c}{\log m}$ の極限をはさみうちの原理を用いて求めます．

解答

(1) **【証明】**

$g(x) = xe^x - me^x + m$ とおく．$g'(x) = e^x + xe^x - me^x = e^x(x - m + 1)$ であるから，$g'(x) = 0$ のとき，$x = m - 1 \geqq 1$ である．よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$m - e^{m-1}$	$\nearrow$	



$$\begin{aligned} g(m-1) &= (m-1)e^{m-1} - me^{m-1} + m \\ &= m - e^{m-1} < 0 \ (\because \ m \geqq 2) \end{aligned}$$

であり，さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ であるから，$x > 0$ で $y = g(x)$ は x 軸とただ 1 点で交わるので，$g(x) = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることが示された．

また，$g(m-1) < 0$ かつ $g(m) = m > 0$ であるから，$m - 1 < c < m$ であることも示された． **(証明終)**

(2) **【証明】**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x x^m - (e^x - 1)mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= \frac{xe^x - me^x + m}{x^{m+1}} \\ &= \frac{g(x)}{x^{m+1}} \end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x) = 0$ のとき，$g(x) = 0$ であるから増減表は，右のようになる．

ゆえに，$x = c$ で最小となることが示された． **(証明終)**

(3)　$a_m = f(c) = \dfrac{e^c - 1}{c^m}$ であり，c は $g(x) = 0$ の解であるから，

$$ce^c - me^c + m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^c - 1 = \frac{ce^c}{m}$$

ゆえに，$a_m = \dfrac{ce^c}{mc^m}$ を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{\log a_m}{m\log m} &= \frac{\log \dfrac{ce^c}{mc^m}}{m\log m} \\
&= \frac{\log ce^c - \log mc^m}{m\log m} \\
&= \frac{\log c + \log e^c - \log m - m\log c}{m\log m} \\
&= \frac{(1-m)\log c + c - \log m}{m\log m} \\
&= \left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{\log c}{\log m} + \frac{c}{m}\cdot\frac{1}{\log m} - \frac{1}{m} \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，(1) より，$m-1 < c < m$ が成り立っていることから，

$$m - 1 < c < m \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{m} < \frac{c}{m} < 1 \quad (\because \quad m \geqq 2)$$

となるので，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{c}{m} = 1$ を得る．…… ②

さらに，$m \geqq 2$ より，

$$m - 1 < c < m \quad \Longleftrightarrow \quad \log(m-1) < \log c < \log m \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\log(m-1)}{\log m} < \frac{\log c}{\log m} < 1$$

であり，

$$\frac{\log(m-1)}{\log m} = \frac{\log m\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)}{\log m} = \frac{\log m + \log\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)}{\log m} = 1 + \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)}{\log m}$$

と変形できるので，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)}{\log m}\right) = 1 \cdots\cdots ③$$

ゆえに，①～③ より，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m} = \mathbf{-1}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

(1), (2) は基本問題です．関数の増減を調べて増減表をかけば示すことができます．(3) の極限計算で式変形に少し苦戦するかもしれません．ここで大切なのは，c と m の関係です．(1) で $m - 1 < c < m$ という関係式を導いているので，$m \to \infty$ のときは，$c \to \infty$ となります．したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{c}{m} = 0$ などのように c を単なる定数扱いしてしまうのは間違いです．これは不定形なので，解答にもあるようにはさみうちの原理から極限を求めます．これと同様に $\dfrac{\log c}{\log m}$ の極限も不定形なので，はさみうちの原理を用いることになりますが，この式変形も一工夫が必要です．問題は，$\dfrac{\log(m-1)}{\log m}$ をどのように変形するかですが，不定形が回避できるようにしなければならない点に注目して変形をしてみましょう．ちなみに，m が十分大きくなると $\log m \fallingdotseq \log(m-1)$ なので，極限値は 1 なのではないかなと予想することもできます．

$a(>1)$ を奇数，$m(>1)$ を整数とするとき，次のことを証明せよ．

（1） m が偶数ならば a^m+1 は 4 で割り切れない．

（2） m が奇数ならば a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れる．

$a(>1)$ を奇数，$m(>1)$ を整数とするとき，次のことを証明せよ．

（1） m が偶数ならば a^m+1 は 4 で割り切れない．

（2） m が奇数ならば a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れる．

【テーマ】：整数問題

方針

偶奇に着目します．様々な解答方法があるので，別解を考えるとよいでしょう．余りに着目すればよいので，合同式を用いても証明できます．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

m は偶数であるから，k を自然数とすると $m=2k$ とおくことができる．また，a は奇数であるから ℓ を自然数として，$a=2\ell-1$ とおくことができる．このとき，

$$a^m+1=(2\ell-1)^{2k}+1=(4\ell^2-4\ell+1)^k+1$$

このとき，二項定理より，

$$(4\ell^2-4\ell+1)^k=\{4(\ell^2-\ell)+1\}^k=\sum_{r=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_r\{4\ell(\ell-1)\}^{k-r}+1$$

となるので，4 で割ると 1 余る．

したがって，a^m+1 を 4 で割ると 2 余るので，4 で割り切れないことが示された． **（証明終）**

別解

（解）① 次のように式変形しても証明できます．

k を自然数とする．m は偶数であるから，$m=2k$ とおくことができる．このとき，

$$a^m+1=a^{2k}-1+2=(a^k+1)(a^k-1)+2$$

a は奇数であるから，$a^k+1,\ a^k-1$ はともに偶数となるので，$(a^k+1)(a^k-1)$ は 4 の倍数である．

したがって，a^m+1 は 4 で割り切れないことが示された． **（証明終）**

（解）② さらに，合同式を利用しても証明できます．

a,b を 4 で割った余りが等しいとき，$a\equiv b$ と表すこととする．m は偶数であるから，k を自然数とすると，$m=2k$ とおくことができ，a は奇数であるから ℓ を自然数として，$a=2\ell-1$ とおくことができる．

このとき，

$$a^m+1=(2\ell-1)^{2k}+1=(4\ell^2-4\ell+1)^k+1\equiv 1+1=2$$

したがって，a^m+1 は 4 で割り切れないことが示された． **（証明終）**

（2）**【証明】**

m は奇数であるから，

$$\begin{aligned} a^m+1 &= (a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}-a^{m-4}+\cdots\cdots+a^2-a+1) \\ &= (a+1)\{a^{m-2}(a-1)+a^{m-4}(a-1)+\cdots\cdots+a(a-1)+1\} \\ &= (a+1)\{(a-1)(a^{m-2}+a^{m-4}+\cdots\cdots+a)+1\} \end{aligned}$$

と因数分解することができる．a は奇数であるから，$a+1$, $a-1$ は偶数である．よって，

$$(a-1)(a^{m-2}+a^{m-4}+\cdots\cdots+a)+1$$

は 1 より大きい奇数となるので，a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れることが示された．　**（証明終）**

◇　♡

解説

（1）は，式変形を用いたり，合同式を用いたりと様々な解法を紹介しました．本解で用いている方法は，二項定理を用いたもので，高校生が思いつきやすい解き方かもしれません．**別解** では，うまく式変形を行えば，楽に証明できるという方法を紹介しました．本解の方法は，合同式を勉強していれば **別解** の合同式の証明と本質的に同じことを行っていることがわかるはずなので，合同式の解法の方が思いつきやすいかもしれませんね．

（2）は，1 より大きい奇数で割り切れることを示すので，1 より大きい奇数を因数に持つことを示します．そこで，因数分解を行いそれを示しましょう．ポイントは，後半のカッコ内において，$(a-1)$ を見つけ出し（偶数）$+1$ という形にすることです．次の因数分解は，必ず知っておきましょう．

（ｉ）n が偶数のとき，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

（ii）n が奇数のとき，

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

➾**注** n が偶数のときは，a^n+b^n は因数分解できるとは限りません．例えば，x^2+1 は実数の範囲で因数分解できませんが，x^6+1 は因数分解することができます．

（1） 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ をみたすとき，

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)\, dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

（2） $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x}\, dx$ を求めよ．

(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ をみたすとき，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$$

が成り立つことを証明せよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：対称性を利用した定積分の計算

方針

$t=\pi-x$ とおいて，置換積分を行います．(2) は (1) を利用すればよいので，どの部分が $f(x)$ に対応するかを考えます．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

$t=\pi-x$ とおくと，$dt=-dx$ で，
x と t の対応は右表のようになるので，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx &= \int_{\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)\,(-dt)\\ &= -\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)\,dt\\ &= -\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-x)\,dx\\ &= -\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx \quad (\because\ \ f(\pi-x)=f(x))\end{aligned}$$

よって，$2\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ を得るので，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が示された．　**(証明終)**

(2)　(1) より，次式が成り立つ．

$$\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx \cdots\cdots ①$$

$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと，

$$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$$

となり，$f(\pi-x)=f(x)$ が成り立つ．よって，① 式が利用できるので，

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

が成り立つ．ここで，

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

x	$0 \to \pi$
u	$1 \to -1$

とする．$u=\cos x$ とおくと，$du=-\sin x dx$ で，
x と u の対応は右表のようになるので，

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{4-\cos^2 x}\,(\sin x dx)\\
&= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}\,(-du) \qquad (☜\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x)\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du \qquad \left(☜\ \frac{1-u^2}{4-u^2}=\frac{(4-u^2)-3}{4-u^2}\right)\\
&= \pi\int_0^1\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du \qquad (☜\ \text{被積分関数が偶関数だから})\\
&= \pi-3\pi\int_0^1\frac{1}{(2-u)(2+u)}\,du\\
&= \pi-\frac{3}{4}\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{2+u}\right)du\\
&= \pi-\frac{3}{4}\pi\Big[-\log|2-u|+\log|2+u|\Big]_0^1\\
&= \pi-\frac{3}{4}\pi\cdot\log 3\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}(4-3\log 3)}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

様々な大学で類題が出題されている問題なので，必ず経験しておきたい問題です．一度経験していれば方針が立つので，後は計算力さえあれば完答できるでしょう．

この問題の流れは，そのままでは定積分が困難な関数を定積分しやすい関数に変換することで，定積分の値を求めることです．そのために (1) のような式を証明させています．(2) では，この式を

$$\int_0^{\pi} xf(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

という形に変形して使うことになります．これは，x を $\frac{\pi}{2}$ に変えても定積分の値は変わらないことを表しているので，この式をヒントにして $f(x)$ を決定するわけです．ただし，この式を使うためには (1) の問題文にもあるように $f(\pi-x)=f(x)$ という関係式が成り立っていなければいけないので，その確認を怠れば減点されるので，注意しましょう．

次の各問いに答えよ．

（1） $x \geqq 1$ のとき，不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

（2） n を自然数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

（3） n を自然数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ．

次の各問いに答えよ.

(1)　$x \geqq 1$ のとき，不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す.

(2)　n を自然数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(3)　n を自然数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}=3$$

であることを示せ.

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は微分を利用すれば示せます．(2) は，はさみうちの原理を利用しましょう．(3) もはさみうちの原理を利用しますが難問です.

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$x \geqq 1$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ である．ゆえに，$y=f(x)$ は単調増加である.

$$f(1)=2-\log 1=2>0$$

より，$x \geqq 1$ で $f(x)>0$ となり，題意は示された.　**（証明終）**

(2)　n は自然数であるから，$\log(n+1)>0$ である.

$$\therefore\ \frac{1}{n}\log(n+1)>0 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$n+1 \geqq 2$ より，(1) の結果が使えて，

$$\log(n+1)<2\sqrt{n+1} \cdots\cdots ②$$

が成り立つので，①, ② より，

$$0<\frac{1}{n}\log(n+1)<\frac{2\sqrt{n+1}}{n}=2\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$n\to\infty$ のとき，$2\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0 \iff \lim_{n\to\infty}\log(n+1)^{\frac{1}{n}}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=\mathbf{1}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(3)　**【証明】**

$y=\sin x$ のグラフは，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，上に凸であるから，2 点 $(0,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を結ぶ線分を考える

と，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，次式が成り立つ.

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq 1$$

各辺正であるから，

$$\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n \leqq (2+\sin x)^n \leqq 3^n$$

したがって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^n \, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n \, dx \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\left[\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1}(3^{n+1}-2^{n+1}) \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^{n+1}}{n+1}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

ここで，(2) の結果を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{3\cdot 3^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= 3\end{aligned}$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n \, dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3$$

よって，① において，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^n \, dx\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることが示された.　**(証明終)**

◇　♡

(1), (2) は，標準的な問題ですが，(3) は様々な工夫が必要なため，やや難しいでしょう．完答できなかったとしても部分点を稼ぐ答案作りを心がけましょう．ポイントは $\dfrac{2}{\pi} \leqq \sin x \leqq 1$ という不等式を母体としてはさみうちの原理が使える形に式変形する点にあります.

曲線 $y=x^3+ax^2+b$ は直線 $l: y=-x+3$ と第 1 象限の点 P で交わり，P における曲線の接線と l は直交する．

（1） a の範囲を求めよ．

（2） b の範囲を求めよ．

曲線 $y=x^3+ax^2+b$ は直線 $l: y=-x+3$ と第 1 象限の点 P で交わり，P における曲線の接線と l は直交する．

（1） a の範囲を求めよ．

（2） b の範囲を求めよ．

【テーマ】：接線と法線

方針

点 P の x 座標を t とおいて，題意を満たすように式を作ります．

♣ ♠

解答

（1） $f(x)=x^3+ax^2+b$ とおき，点 P が直線 l 上にあるので，$\mathrm{P}(t,\ -t+3)$ とおく．このとき，点 P は第 1 象限にあることから $0<t<3$ である．

点 P における接線が直線 l と直交するので，点 P における接線の傾きは 1 となる．したがって，

$$f'(t)=1 \iff 3t^2+2at-1=0 \cdots\cdots ①$$

ここで，① が $0<t<3$ の間に実数解をもてばよい．$f(0)=-1<0$ であるから，$0<t<3$ の間に実数解をもつための条件は，

$$f(3)>0$$

ゆえに，

$$27+6a-1>0 \iff \boldsymbol{a>-\frac{13}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） a が (1) の条件を満たせば，① は $0<t<3$ の間に実数解をもつ．これに加えて，曲線 $y=f(x)$ が点 P を通れば，題意の条件はすべて満たされるので，

$$t^3+at^2+b=-t+3 \iff t^3+at^2+t+b-3=0$$

ここで，① より，$at=\dfrac{1-3t^2}{2}$ であるから，

$$t^3+t\cdot\frac{1-3t^2}{2}+t+b-3=0$$
$$\therefore\ b=\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+3$$

$g(t)=\dfrac{1}{2}t^3-\dfrac{3}{2}t+3$ とおいて，$0<t<3$ において，$g(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．

$$g'(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}$$

であるから，$g'(t)=0$ のとき，$t=1$ ($\because\ 0<t<3$)．よって，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	2	↗	12

ゆえに，b のとり得る値は，$\boldsymbol{2\leqq b<12}\cdots\cdots(\text{答})$

◊ ♡

解説

(1) で，l が点 P における曲線の法線になる条件から a の範囲を求め，(2) で，$y=f(x)$ と l が点 P で交わることから b の範囲を求めます．少し考えにくいかもしれませんが，b の範囲を出すときは，① で a を消去して t の式を作るところがポイントです．あとは，点 P が第 1 象限にあるという条件から t の範囲を求めておくことを忘れないようにしましょう．

k は 2 以上の自然数とする．「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚，… ,「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ.

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ.

(2)　p_{n+1} を p_n, M, N で表せ.

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ.

(4)　p_n を n と k で表せ.

k は 2 以上の自然数とする．「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$，「k」と書かれたカードが k 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す．記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ．

(2)　p_{n+1} を p_n, M, N で表せ．

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ．

(4)　p_n を n と k で表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

漸化式を作って p_n を求めます．(3) では，k の偶奇で場合分けが必要です．

♣　　♠

解答

(1)　記録された n 個の数の和を X_n とする．題意より，偶数・奇数が取り出される確率はそれぞれ $\dfrac{M}{M+N}$，$\dfrac{N}{M+N}$ である．X_1 が偶数となるのは，偶数を取り出すときなので，

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{M}{M+N}} \cdots\cdots(\text{答})$$

X_2 が偶数となるのは，偶数のカードが 2 回，奇数のカードが 2 回取り出されるときで，

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+N}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　X_{n+1} が偶数になるのは，

（ｉ）　n 回目までの和が偶数で，次に偶数が出る

（ii）　n 回目までの和が奇数で，次に奇数が出る

ときであるから，

$$p_{n+1} = \frac{M}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}(1-p_n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　題意から，

$$M+N = 1+2+3+\cdots\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

である．ここで，k の偶奇で場合分けを行う．

（ｉ）　k が奇数のとき，

$$\begin{aligned} M-N &= (2+4+6+\cdots\cdots+(k-1)) - (1+3+5+\cdots\cdots+(k-2)+k) \\ &= (2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots\cdots+\{(k-1)-(k-2)\}-k \\ &= \frac{k-1}{2} - k = \frac{-k-1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{M-N}{M+N}=\frac{-\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}k(k+1)}=-\frac{1}{k}$$

（ii） k が偶数のとき，

$$\begin{aligned}M-N&=(2+4+6+\cdots\cdots+k)-(1+3+5+\cdots\cdots+(k-1))\\&=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots\cdots+\{k-(k-1)\}\\&=\frac{k}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{M-N}{M+N}=\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k(k+1)}=\frac{1}{k+1}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}}=\begin{cases}\boldsymbol{-\frac{1}{k}} & (\boldsymbol{k}\ \text{は奇数})\\ \boldsymbol{\frac{1}{k+1}} & (\boldsymbol{k}\ \text{は偶数})\end{cases}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) (2) で求めた式から，

$$p_{n+1}=\frac{M-N}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N} \quad \cdots\cdots \ ①$$

$$\alpha=\frac{M-N}{M+N}\alpha+\frac{N}{M+N} \quad \cdots\cdots \ ②$$

① − ② より，

$$p_{n+1}-\alpha=\frac{M-N}{M+N}(p_n-\alpha)\ \cdots\cdots \ ③$$

一方 ② より，

$$\left(1-\frac{M-N}{M+N}\right)\alpha=\frac{N}{M+N} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2}$$

であるから，③ 式は，次のようになる．

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n+1\right\}$$

ゆえに，(3) の結果から，

$$\boldsymbol{p_n}=\begin{cases}\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{k}\right)^n+1\right\}} & (\boldsymbol{k}\ \text{は奇数})\\ \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{k+1}\right)^n+1\right\}} & (\boldsymbol{k}\ \text{は偶数})\end{cases}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，n 回目までの状況と，$n+1$ 回目の状況で確率遷移図をかいて考えると状況が視覚的に捉えられるので立式しやすくなります．k での場合分けが必要になる理由は，$M-N$ の値が k の偶奇によって変わってくるためです．

自然数 n に対し，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n 2\theta\sin^3\theta\,d\theta$ とする．

(1)　I_2 の値を求めよ．

(2)　xy 平面上で原点 O から点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ への距離を r，x 軸の正の方向と半直線 OP のなす（弧度法による）角を θ とする．方程式 $r=\sin 2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を，直線 $y=x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき，$V=3\pi I_3+2\pi I_2$ と表されることを示せ．

自然数 n に対し，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n 2\theta\sin^3\theta\,d\theta$ とする．

（1） I_2 の値を求めよ．

（2） xy 平面上で原点 O から点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ への距離を r，x 軸の正の方向と半直線 OP のなす（弧度法による）角を θ とする．方程式 $r=\sin 2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を，直線 $y=x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき，$V=3\pi I_3+2\pi I_2$ と表されることを示せ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，定積分の計算をするだけです．置換積分を利用するとよいでしょう．(2) 回転軸を x 軸にすることを考えましょう．

♣ ♠

解答

（1）

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin^3\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\cos\theta=t$ とおくと，$-\sin\theta d\theta=dt$ であり，右表より，

θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$
t	1	→	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^2(1-t^2)\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(-4t^6+8t^4-5t^2+1)\,dt$$
$$=\left[-\frac{4}{7}t^7+\frac{8}{5}t^5-\frac{5}{3}t^3+t\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$
$$=-\frac{4}{7}+\frac{8}{5}-\frac{5}{3}+1-\left(-\frac{4}{7\cdot 8\sqrt{2}}+\frac{8}{5\cdot 4\sqrt{2}}-\frac{5}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{38-26\sqrt{2}}{105}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） **【証明】**

与えられた曲線を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動すると，

$$r=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\theta\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

となる．よって，この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積が V となる．

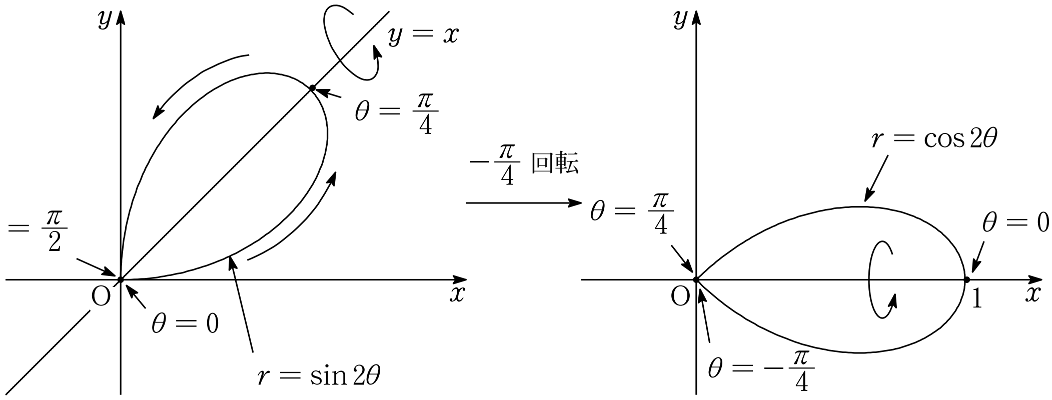
$$r(\theta)=\cos 2\theta \text{ とすると，} r(-\theta)=\cos 2(-\theta)=\cos 2\theta=r(\theta)$$

であるから，この曲線は x 軸に関して対称となる．

$$x=r\cos\theta=\cos 2\theta\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=\cos 2\theta\sin\theta$$

であり，

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta$$



より，求める体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 y^2\,dx \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 2\theta \sin^2\theta(-2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta)\,d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin^2\theta(4\sin\theta\cos^2\theta + \cos 2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin^3\theta(3\cos 2\theta + 2)\,d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos^3 2\theta\sin^3\theta + 2\cos^2 2\theta \sin^3\theta)\,d\theta \\
&= 3\pi I_3 + 2\pi I_2
\end{aligned}
$$

ゆえに，示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

◇　　　♡

解説

(1) は，$\cos\theta = t$ と置換することで t の多項式になります．三角関数を多項式に置換するときは，偶数乗の方を t とおくとうまくいくことが多いです．

(2) は，極座標表示された曲線の回転体の体積で，しかも斜軸回転体です．まずは，回転軸を x 軸にすることを考えましょう．そうすることで考えやすくなります．また，極座標表示された曲線の回転体の体積の計算の仕方なども確認しておきましょう．

放物線 $y = x^2$ 上に，直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ.

放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ.

【テーマ】：放物線と直線

方針

P, Q の座標を設定し，その 2 点が $y=ax+1$ に関して対称になるための条件を考えます.

♣ ♠

解答

P$(p,\ p^2)$, Q$(q,\ q^2)$ とおく．これら 2 点が $y=ax+1$ に関して対称となるための条件を考える.
線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が $y=ax+1$ 上にあることから,

$$\frac{p^2+q^2}{2}=a\cdot\frac{p+q}{2}+1 \iff p^2+q^2=a(p+q)+2 \cdots\cdots ①$$

また，直線 PQ と $y=ax+1$ が直交するので，直線 PQ の傾きが $-\dfrac{1}{a}$ となることから

$$\frac{p^2-q^2}{p-q}=-\frac{1}{a} \iff p+q=-\frac{1}{a} \cdots\cdots ②$$

① より,

$$(p+q)^2-2pq=a(p+q)+2$$
$$\frac{1}{a^2}-2pq=1 \quad (\because\ ②)$$
$$\therefore\ pq=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right) \cdots\cdots ③$$

②, ③ より，$p,\ q$ を 2 解とする 2 次方程式は,

$$x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$
$$2a^2x^2+2ax+1-a^2=0$$

題意を満たすためには，この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持てばよいので，判別式を D とすると,

$$D/4=a^2-2a^2(1-a^2)>0$$

$a^2>0$ であるから,

$$-1+2a^2>0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a<-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<a} \cdots\cdots\text{(答)}$$

♢ ♡

解説

P, Q の x 座標を設定してこれら 2 点が直線 $y=ax+1$ に関して対称になるような $p,\ q$ の条件を求めます．それが ①, ② です．このような 2 点が存在するためには，$p,\ q$ が存在しないといけないので，$p+q,\ pq$ の値から 2 次方程式を作って，実数条件を利用することで a の範囲を求めます.

正の実数 a に対し，実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{-2}^{2} |x-t|(t^2-a^2)\,dt$$

で定める．このとき，$g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき，$g(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

正の実数 a に対し，実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_{-2}^{2}|x-t|(t^2-a^2)\,dt$$

で定める．このとき，$g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき，$g(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

【テーマ】：定積分と最大最小

方針

定積分の計算を行うために，絶対値をはずすことからはじめましょう．

♣ ♠

解答

（i） $x<-2$ のとき，

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_{-2}^{2}(t-x)(t^2-a^2)\,dt\\ &=\int_{-2}^{2}(t^3-xt^2-a^2t+a^2x)\,dt\\ &=2\int_{0}^{2}(-xt^2+a^2x)\,dt\\ &=2\Big[-\frac{x}{3}t^3+a^2xt\Big]_0^2\\ &=\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x \end{aligned}$$

（ii） $-2\leqq x\leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_{-2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)\,dt-\int_{x}^{2}(x-t)(t^2-a^2)\,dt\\ &=\int_{-2}^{x}(-t^3+xt^2+a^2t-a^2x)\,dt-\int_{x}^{2}(-t^3+xt^2+a^2t-a^2x)\,dt\\ &=\Big[-\frac{1}{4}t^4+\frac{x}{3}t^3+\frac{a^2}{2}t^2-a^2xt\Big]_{-2}^{x}-\Big[-\frac{1}{4}t^4+\frac{x}{3}t^3+\frac{a^2}{2}t^2-a^2xt\Big]_{x}^{2}\\ &=\frac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8 \end{aligned}$$

（iii） $x>2$ のとき，

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_{-2}^{2}(x-t)(t^2-a^2)\,dt\\ &=-\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x\quad(\because\ \text{（i）}) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$g(x)=\begin{cases}\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x & (x<-2)\\ \frac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8 & (-2\leqq x\leqq 2)\\ -\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x & (x>2)\end{cases}$$

ここで，$4a^2-\dfrac{16}{3}>0$ ならば，$x<-2$ で $g(x)$ は単調増加し，$x>2$ で $g(x)$ は単調減少するため，$g(x)$ は最小値を持たないので，$g(x)$ が最小値を持つためには，$4a^2-\dfrac{16}{3}\leqq 0$ であることが必要．このとき，

$$4a^2-\frac{16}{3}\leqq 0 \iff a^2\leqq\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a>0$ であるから，

$$0<a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

逆にこのとき，最小値をとるとすれば，$-2\leqq x\leqq 2$ でとるので，この区間において，

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8\\ &=\frac{1}{6}(x^2-3a^2)^2-\frac{3}{2}a^4-4a^2+8 \end{aligned}$$

より，$x=\pm\sqrt{3}a$ のとき，最小値 $-\dfrac{3}{2}a^4-4a^2+8$ をとる．以上より，$g(x)$ が最小値をとるための a の範囲とそのときの最小値は，

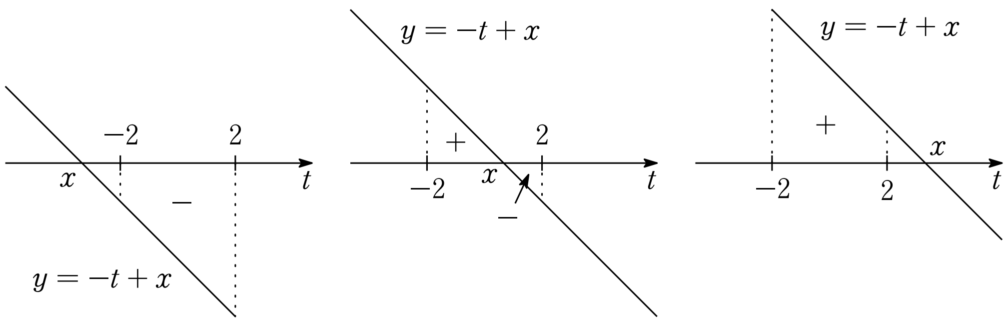
$$\boldsymbol{0<a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}},\ \textbf{最小値：}\ \boldsymbol{-\frac{3}{2}a^4-4a^2+8}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

絶対値をはずす方法として，次のようなグラフを考える方法があります．まず，積分変数を横軸にとって，絶対値の中身の関数のグラフをかきます．本問の場合，積分変数は t で絶対値の中は $x-t$ なので，x を定数とみなして，$y=x-t$ のグラフをかきます．

次に，t 軸との交点を書き込み，積分区間を書き入れます．その際，問題文に x の範囲が書かれていればそれにしたがいます．もちろん場合分けが必要になることもあります．本問は，x の範囲が書かれていないので，場合分けが必要になります．x と $-2,2$ の位置関係で 3 通りに分ける必要があるというわけです．



2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする．

（1） n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ．

（2） A, B, C の 3 人が，A, B, C, A, B, C, A, …… の順に，このくじ引きを行うとする．1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ．B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ．

2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする．

（1） n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ．

（2） A, B, C の 3 人が，A, B, C, A, B, C, A, …… の順に，このくじ引きを行うとする．1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ．B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

くじを順番に引くということは，一列に並べることと同じことです．条件に合う場合の数を計算します．

♣ ♠

解答

当たりくじを○，はずれくじを×で表すこととする．

（1） n 回目に 1 本目の当たりくじが出るということは，

$$\underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{(n-1)\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\cdots\times\bigcirc\times\cdots\times}_{(102-n)\text{ 個}}$$

上記のように○×を並べる方法は，最初の○が出た後は，どこで○が出ても良いので，$102-n$ 通りあり，全ての○×の並べ方は ${}_{102}\mathrm{C}_2=5151$ 通りであるから，求める確率は，

$\boldsymbol{\dfrac{102-n}{5151}}$ ……**(答)**

（2） A が k $(1\leqq k\leqq 34)$ 回目に当たりくじを引くとする．

$$\begin{array}{l}\mathrm{A\,B\,C}\cdots\mathrm{A\,B\,C}\cdots\mathrm{A\,B\,C}\\ \underbrace{\times\times\times\cdots}_{3(k-1)\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\times\cdots\times\times\times}_{(104-3k)\text{ 個}}\end{array}$$

上記のように○×を並べる方法は，A が最初の○を引いた後は，誰が○を引いても良いので，$104-3k$ 通りある．よって，A が k 回目に当たりくじを引く確率は，

$$\frac{104-3k}{5151}$$

である．したがって，A が当たりくじを引く確率は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{34}\frac{104-3k}{5151}&=\frac{104\cdot 34-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35}{5151}\\&=\boldsymbol{\frac{103}{303}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

B が k $(1\leqq k\leqq 34)$ 回目に当たりくじを引くときも同様に考える．

$$\begin{array}{l}\mathrm{A\,B\,C}\cdots\mathrm{A\,B\,C\,A}\cdots\mathrm{A\,B\,C}\\ \underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{\{3(k-1)+1\}\text{ 個}}\bigcirc\underbrace{\times\times\cdots\times\times\times}_{(103-3k)\text{ 個}}\end{array}$$

上記のように○×を並べる方法は B が最初の○を引いた後は，誰が○を引いても良いので，$103-3k$ 通りある．よって，B が k 回目に当たりくじを引く確率は，

$$\frac{103-3k}{5151}$$

である．したがって，B が当たりくじを引く確率は，

$$\sum_{k=1}^{34}\frac{103-3k}{5151}=\frac{103\cdot 34-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 34\cdot 35}{5151}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

C については，余事象の確率を考えて，

$$1-\left(\frac{103}{303}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{33}{101}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

くじを取り出すという問題ですが，本質的には，○×を一列に並べるという問題と同じです．それに気がつけば後は並べ方の方法を考えるだけです．最初の○が出るまでは×しか出ないので，並べ方は 1 通りになります．問題は最初の○が出た後になります．残りは○が 1 つで後は全て×になります．したがって，その並べ方はどこに○を置けばよいかを考えればよいだけなので，並べ方の総数は残った記号の数に一致します．(2) でも同様に考えますが，(2) では，A だけに着目して考えたいので，A が k 回目にくじを引くときを考えています．つまり，1 回目の A に○がくるとき，2 回目の A に○がくるとき … 34 回目の A に○がくるときを考えて全ての確率を和の法則によって加えればよいのです．B についても同様に考えることができます．C は同じように考えてもできますが，余事象を使う方が楽でしょう．もちろん，検算という意味で，A, B のときと同様の方法で求めても構いません．

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，すべての自然数 n について

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-{b_n}^2},\quad b_{n+1}=a_{n+1}b_n$$

をみたしているとする.

(1)　初項が $a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$ であるとする.

(i)　a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ.

(ii)　a_n, b_n を表す n の式を推定し，それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ.

(2)　初項が $a_1=\dfrac{1}{2010}, b_1=\dfrac{2009}{2010}$ であるとする.

(i)　$a_{n+1}+b_{n+1}$ を a_n, b_n で表せ.

(ii)　a_n+b_n を求めよ.

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，すべての自然数 n について

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-{b_n}^2},\quad b_{n+1}=a_{n+1}b_n$$

をみたしているとする．

(1)　初項が $a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$ であるとする．

（ i ）　a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ．

（ii）　a_n, b_n を表す n の式を推定し，それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

(2)　初項が $a_1=\dfrac{1}{2010}$, $b_1=\dfrac{2009}{2010}$ であるとする．

（ i ）　$a_{n+1}+b_{n+1}$ を a_n, b_n で表せ．

（ii）　a_n+b_n を求めよ．

【テーマ】：連立漸化式

方針

(1) の帰納法での証明は，a_n, b_n を同時に行います．(2)(ii) では，答えを予測することから始めましょう．

♣　♠

解答

(1)（ i ）　与えられた漸化式より，

$$a_2=\frac{a_1}{1-{b_1}^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$b_2=a_2b_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_3=\frac{a_2}{1-{b_2}^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$b_3=a_3b_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（ii）（ i ）より，

$$a_n=\frac{n}{n+1},\quad b_n=\frac{1}{n+1}$$

と推定できるので，これが正しいことを数学的帰納法を用いて示す．

【証明】

①　$n=1$ のとき，条件より成立．

②　$n=k$ のとき，

$$a_k=\frac{k}{k+1},\quad b_k=\frac{1}{k+1}$$

であると仮定する．このとき，与えられた漸化式より，

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1-{b_k}^2}=\frac{\frac{k}{k+1}}{1-\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k(k+1)}{(k+1)^2-1}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$b_{k+1}=a_{k+1}b_k$$
$$=\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{1}{k+2}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

ゆえに，すべての自然数 n に対して，成り立つことが示された．（証明終）

(2)（ｉ）

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+1}b_n$$
$$=a_{n+1}(1+b_n)$$
$$=\frac{a_n}{1-{b_n}^2}(1+b_n)$$
$$=\frac{a_n}{(1-b_n)(1+b_n)}(1+b_n)$$
$$=\boldsymbol{\frac{a_n}{1-b_n}}\cdots\cdots\text{(答)}$$

（ii） $a_n+b_n=1$ と推定する．これが正しいことを数学的帰納法で示す．

【証明】

① $n=1$ のとき，

$$a_1+b_1=\frac{1}{2010}+\frac{2009}{2010}=1$$

より，成り立つ．

② $n=k$ のとき，

$$a_k+b_k=1$$

であると仮定する．このとき，(ｉ) の結果から，

$$a_{k+1}+b_{k+1}=\frac{a_k}{1-b_k}$$
$$=\frac{a_k}{a_k}\quad(\because\quad a_k=1-b_k)$$
$$=1$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

ゆえに，すべての自然数 n に対して，成り立つことが示された．（証明終）

$$\therefore\quad a_n+b_n=\mathbf{1}\cdots\cdots\text{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，漸化式を利用して具体的に計算をすることで，a_{n+1} を求めたあと，b_{n+1} が求まることを理解しておきます．この経験を生かして (ii) で数学的帰納法による証明をする際，a_k, b_k を同時に仮定し，a_{k+1}, b_{k+1} の順で示さなければならないという方針が立つのです．

(2) は，与えられた漸化式を用いれば (ｉ) は比較的すんなり求めることができますが，(ii) で答えの予測を立てて帰納法で示すという方針が立たなければ難しく感じるでしょう．(ｉ) で求めた漸化式から a_n+b_n を求めることはできないため，(1) での結果と (2) で与えられた初項から予測しなければならなくなります．

x の関数 $y=\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ.

x の関数 $y=\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ.

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

$t=\sin x$ とおいて考えますが，$t=1$ のとき，a の値にかかわらず $y=1$ になることに着目します.

解答

$$\begin{aligned} y &= \left(1-\frac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x \\ &= \left\{1-\frac{a}{2}(1-\sin^2 x)\right\}\sin x \end{aligned}$$

ここで，$t=\sin x$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ より，

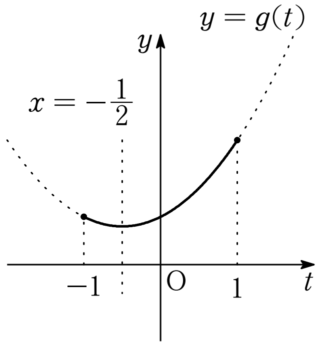
$$\begin{aligned} y &= \left\{1-\frac{a}{2}(1-t^2)\right\}t \\ &= \frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t \end{aligned}$$

$f(t)=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ とおくと，$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ となるので，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $f(t) \leqq 1$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t \leqq 1 \quad \cdots\cdots(*) \\ \iff &\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t-1 \leqq 0 \\ \iff &(t-1)\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{a}{2}t+1\right) \leqq 0 \end{aligned}$$

$t-1 \leqq 0$ であるから，$g(t)=\dfrac{a}{2}t^2+\dfrac{a}{2}t+1$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $g(t) \geqq 0$ であればよい.

$$g(t)=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a}{8}+1$$



（i） $a>0$ のとき，

$-\dfrac{a}{8}+1 \geqq 0$ であればよいので，$a \leqq 8$ を得る.

$$\therefore\quad 0<a \leqq 8$$

（ii） $a=0$ のとき，

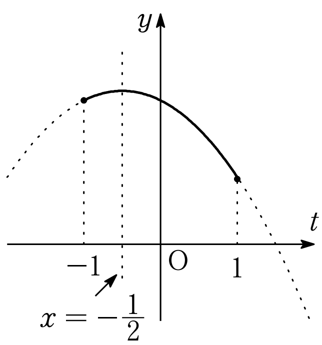
$g(t)=1$ となるので，$t=1$ で最大値 1 をとり，条件に適する.

（iii） $a<0$ のとき，

$g(1) \geqq 0$ であればよいので，

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+1 \geqq 0$$

$$\therefore\quad -1 \leqq a<0$$



以上より，求める a の値の範囲は，

$$-1 \leqq a \leqq 8$$

◇ ♡

解説

置き換えをして，t の 3 次関数にするのは定石ですが，本問では $y = f(t)$ が定点 $(-1,\ -1),\ (1,\ 1)$ を通ることが重要なポイントになります．$t = 1$ で $y = 1$ となることが分かっているので，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $f(t) \leqq 1$ となるような a の値の範囲を求めればよいことになります．よって，$(*)$ の不等式を考えればよく最終的には，2 次関数のグラフを使って処理できるようになります．

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ において

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{5}{3}, \quad a_n = \frac{1}{3}(4a_{n-1} - a_{n-2}) \qquad (n \geqq 3)$$

という関係がある.

（1） a_n を n の式で表せ.

（2） $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log(a_k - 1)\log(a_{k+1} - 1)}$ とおくとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．ただし，対数は常用対数とする.

数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ において

$$a_1 = 3,\quad a_2 = \frac{5}{3},\quad a_n = \frac{1}{3}(4a_{n-1} - a_{n-2}) \qquad (n \geqq 3)$$

という関係がある．

（1） a_n を n の式で表せ．

（2） $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\log(a_k - 1)\log(a_{k+1} - 1)}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．ただし，対数は常用対数とする．

【テーマ】：隣接３項間漸化式と無限級数

方針

（1）では，特性方程式の解を利用して，与えられた漸化式を式変形します．（2）では，部分分数分解を行います．

♣ ♠

解答

（1） 漸化式 $3a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ の特性方程式は，

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (3x-1)(x-1) = 0$$

であるから，解は $x = \frac{1}{3}, 1$ である．よって，与えられた漸化式は，次のように変形できる．

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-2} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad \cdots\cdots \quad ②$$

① より，

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3} \ \cdots\cdots ③$$

② より，

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}(a_2 - a_1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{3} - 3\right) \\ &= -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

③×3－④ より，

$$2a_n = 2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） （1）より，S_n を変形すると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\log 3}\right)\left\{\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\left\{\left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^0} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^1}\right) + \left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^1} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)$$

$$= -\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{-n\log 3}{\log 2(\log 2 - n\log 3)}$$

$$= \frac{n}{(\log 2)^2 - n\log 2\log 3}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(\log 2)^2}{n} - \log 2\log 3}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\log 2\log 3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

隣接 3 項間漸化式の解法をまとめておきます．誘導なしで解けるようにしておきましょう．

（2）では，（1）の結果を代入することで部分分数分解ができるようになります．対数が絡んでいますが，考え方は通常の部分分数分解と同じです．

【隣接３項間漸化式】

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + r = 0$$

【解法と解説】

$r = 0$ のときは，$x^2 + px + q = 0$（**特性方程式**という）を解いてその解 $x = \alpha, \beta$ を求めると，

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

の 2 式が得られる．これは，等比数列型の漸化式であるから，両方を計算し，

$$a_{n+1} - \alpha a_n\ ,\quad a_{n+1} - \beta a_n$$

を求めれば，2 式を引くことから a_n が得られる．$\alpha = \beta$ のときは，これらは同じ式になるので，通常の隣接 2 項間漸化式として解くことができる．

$r \neq 0$ のときは，一度階差をとることで定数 r を消去すれば上の方法が使える．なお，各係数の和が 0 となるとき，特性方程式の解 $x = \alpha, \beta$ のうち 1 つは必ず 1 になるので，

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = a_{n+1} - \alpha a_n = \cdots\cdots = a_2 - \alpha a_1$$

とすることができ，すぐに隣接 2 項間漸化式に帰着される．

✎注：a_{n+2} の係数が 1 以外の時も同様にして解くことができる．

(1) 直線 $x+y=2$ と円 $x^2+y^2=5$ の交点の座標を求めよ.

(2) 2つの実数 a, b のうち，大きい方を $\max\{a,\ b\}$ で表す.（$a=b$ のときは，$\max\{a,\ b\}=a$ である.）
次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ.

$$1 \leqq \max\{4x+4y-3,\ \ x^2+y^2\} \leqq 5$$

(1)　直線 $x+y=2$ と円 $x^2+y^2=5$ の交点の座標を求めよ.

(2)　2 つの実数 $a,\,b$ のうち，大きい方を $\max\{a,\,b\}$ で表す.（$a=b$ のときは，$\max\{a,\,b\}=a$ である.）

次の不等式を満たす点 $(x,\,y)$ の存在する範囲を図示せよ.

$$1 \leqq \max\{4x+4y-3,\ x^2+y^2\} \leqq 5$$

【テーマ】：不等式を満たす領域

方針

$4x+4y-3,\,x^2+y^2$ の大小で場合分けを行います.

♣　♠

解答

(1)　$y=2-x$ より，

$$x^2+(2-x)^2=5 \iff 2x^2-4x-1=0$$

よって，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ である．このとき，

$$y=2-\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}=\frac{2\mp\sqrt{6}}{2}\quad（複号同順）$$

ゆえに，交点の座標は，

$$\boldsymbol{\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},\ \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},\ \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$4x+4y-3$ と x^2+y^2 の大小で場合分けを行う.

(i)　$4x+4y-3 \leqq x^2+y^2$ のとき，

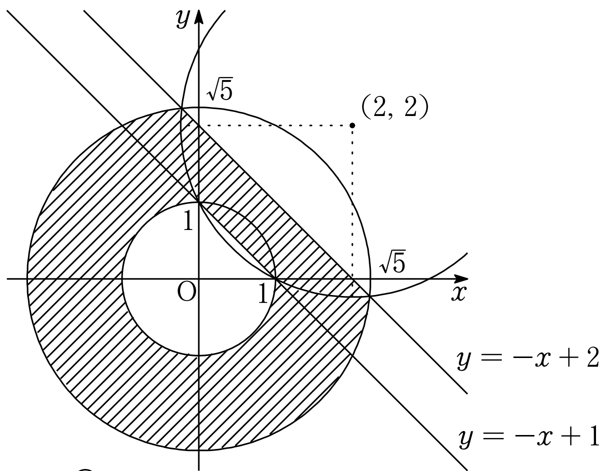
$$x^2-4x+y^2-4y \geqq -3$$

$$\therefore\quad (x-2)^2+(y-2)^2 \geqq 5 \cdots\cdots ①$$

であり，このとき，与えられた不等式は

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 5 \cdots\cdots ②$$

となるので，①, ② の共通部分が求める領域となる.



(ii)　$4x+4y-3 > x^2+y^2$ のとき，

$$(x-2)^2+(y-2)^2 < 5 \cdots\cdots ③$$

であり，このとき，与えられた不等式は

$$1 \leqq 4x+4y-3 \leqq 5 \iff 1 \leqq x+y \leqq 2 \cdots\cdots ④$$

となるので，③, ④ の共通部分が求める領域となる.

ゆえに，(i), (ii) より，求める点 $(x,\,y)$ の存在する領域は，上図斜線部分で境界線を含む.

◊　♡

解説

$\max\{a, b\}$ は，a と b の大きい方を採用するという意味なので，$a \leqq b$, $a > b$ となるための条件を求める必要があります．また，同様に $\min\{a, b\}$ という関数もあります．これは，小さいほうを採用するという意味です．基本的に，何の説明もなく使われることはないのでその意味を忘れてしまってもあまり困ることはないと思いますが，知っておく方が時間が節約できてよいでしょう．