長さ 1 の線分 AB の端点 B において，AB に垂直にひいた直線上に任意の点 C をとり，線分 AC 上に CB $=$ CP である点 P をとり，P から AB におろした垂線の足を Q とする．

(1)　$\angle$ACB $= \theta$ として，PQ の長さを $\theta$ で表せ．

(2)　PQ の長さが最大となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

長さ 1 の線分 AB の端点 B において，AB に垂直にひいた直線上に任意の点 C をとり，線分 AC 上に CB ＝ CP である点 P をとり，P から AB におろした垂線の足を Q とする．

（1）　∠ACB ＝ $\theta$ として，PQ の長さを $\theta$ で表せ．

（2）　PQ の長さが最大となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

**【テーマ】：微分法の応用**

**方針**

(1) は三角比を利用して辺の長さを求めます．(2) は微分して増減表を書きますが，$f'(\theta)=0$ を満たす $\theta$ は求めることができないので，文字で代用します．

♣　♠

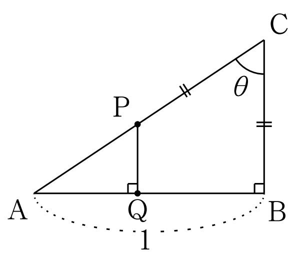
**解答**

(1)　$\mathrm{BC}=\mathrm{PC}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$ であり，$\mathrm{AC}=\dfrac{1}{\sin\theta}$ より，

$$\mathrm{AP}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

△APQ ∽ △ACB より，∠APQ ＝ $\theta$ であるから，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{AP}\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}}\cdots\cdots(\text{答})$$




(2)　$f(\theta)=\dfrac{\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=\frac{(-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta-(\cos\theta-\cos^2\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-\sin^2\theta+2\cos\theta\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-1+\cos\theta(2\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-1+\cos\theta(\sin^2\theta+1)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-1+\cos\theta(2-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-\cos^3\theta+2\cos\theta-1}{1-\cos^2\theta}\\
&=\frac{-(\cos\theta-1)(\cos^2\theta+\cos\theta-1)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\\
&=\frac{\cos^2\theta+\cos\theta-1}{1+\cos\theta}
\end{aligned}$$

ここで，$f'(\theta)=0$ のとき，$\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすので，$0<\cos\theta<1$ である．したがって，

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる．よって，これを満たす $\theta$ の値を $\alpha$ とすると，増減表は次のようになる．

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\theta)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

ゆえに，$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のとき，最大値をとるので，求める $\cos\theta$ の値は，

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

**解説**

(1) は辺の長さを三角比を用いて表すことができるので，基本問題です．(2) では，(1) で求めた PQ を $\theta$ の関数とみなせばよいので，$f(\theta)$ とおいて，最大となる場合を増減表を用いて求めます．ただし，最大となる $\theta$ の値は求められないので文字で代用しましょう．本問では，最大値を求めることまでは要求していませんが，$\alpha$ が

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$$

を満たすので，これと $\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ をうまく用いれば最大値が求められます．

$\overrightarrow{a}\ \left(\left|\overrightarrow{a}\right|>1\right)$ を平面上のベクトル，$\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ と同じ向きをもつ単位ベクトル，$T$ を長さが 1 を超えない平面上のベクトル全体の集合とする．

（1） $T$ 内のすべてのベクトル $\overrightarrow{t}$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{t}\right)\leqq 0$$

ここで，・ はベクトルの内積を表すものとする．

（2） $T$ 内のすべての $\overrightarrow{t}$ に対して，不等式 $\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{t}\right)\leqq 0$ を満たす $T$ 内のベクトル $\overrightarrow{x}$ は，$\overrightarrow{b}$ のほかにはないことを証明せよ．

$\vec{a}\ \left(\left|\vec{a}\right|>1\right)$ を平面上のベクトル，$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と同じ向きをもつ単位ベクトル，$T$ を長さが 1 を超えない平面上のベクトル全体の集合とする．

(1)　$T$ 内のすべてのベクトル $\vec{t}$ に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{t}\right)\leqq 0$$

ここで，・ はベクトルの内積を表すものとする．

(2)　$T$ 内のすべての $\vec{t}$ に対して，不等式 $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}-\vec{t}\right)\leqq 0$ を満たす $T$ 内のベクトル $\vec{x}$ は，$\vec{b}$ のほかにはないことを証明せよ．

**【テーマ】：内積と不等式の証明**

**方針**

内積の計算をして大きさが 1 である任意のベクトル $\vec{t}$ について考えます．(2) は必要性を示して，十分性の確認をします．

---

**解答**

(1) **【証明】**

$\vec{t}\in T$ より，$\left|\vec{t}\right|\leqq 1$ である．また，題意より，$\vec{b}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$，$\left|\vec{b}\right|=1$ であるから，

$$\begin{aligned}
\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{t}\right)&=\left|\vec{b}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{t}+\vec{a}\cdot\vec{t}\\
&=1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\left|\vec{a}\right|^2-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}\cdot\vec{t}+\vec{a}\cdot\vec{t}\\
&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\right)\vec{a}\cdot\vec{t}\\
&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(1-\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\right)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{t}\right|\cos\theta\\
&=1-\left|\vec{a}\right|+\left(\left|\vec{a}\right|-1\right)\left|\vec{t}\right|\cos\theta\\
&=\left(1-\left|\vec{a}\right|\right)\left(1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

ただし，$\vec{a}$ と $\vec{t}$ のなす角を $\theta$ とする．ここで，$\left|\vec{t}\right|\leqq 1$ より，$-1\leqq-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\leqq 1$ であるから，

$$1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\geqq 0$$

であり，$1-\left|\vec{a}\right|<0$ より，

$$\left(1-\left|\vec{a}\right|\right)\left(1-\left|\vec{t}\right|\cos\theta\right)\leqq 0$$

となり，示された．　**(証明終)**

(2) **【証明】**

$T$ 内のすべての $\vec{t}$ に対して与えられた不等式は成立するので，$\vec{t}=\vec{b}$ としても成り立つ．したがって，

$$\left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{x}-\vec{b}\right)\leqq 0$$

$$\left|\vec{x}\right|^2-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq 0$$

(1) より，$\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\vec{b}$ を代入して

$$\left|\vec{x}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|^2\leqq 0 \cdots\cdots ①$$

一方，$\vec{x}\cdot\vec{b}\leqq\left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right|$ であるから，① とあわせて，

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|^2\leqq\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b}\leqq\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right| \cdots\cdots ②$$

$\left|\vec{b}\right|=1$ であるから，

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\leqq\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\vec{x}\cdot\vec{b}\leqq\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|$$

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\leqq\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|$$

$$\left|\vec{x}\right|^2+\left|\vec{a}\right|-\left(\left|\vec{a}\right|+1\right)\left|\vec{x}\right|\leqq 0$$

$$\left(\left|\vec{x}\right|-\left|\vec{a}\right|\right)\left(\left|\vec{x}\right|-1\right)\leqq 0$$

$\left|\vec{a}\right|>1$ で $\left|\vec{x}\right|\leqq 1$ より，$\left|\vec{x}\right|-\left|\vec{a}\right|<0$ であり，$\left|\vec{x}\right|-1\leqq 0$ であるから，この不等式が成り立つのは，等号が成立するときのみであり，その条件は ② とあわせて，

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{b}\right| \text{ かつ } \left|\vec{x}\right|=1$$

すなわち $\vec{x}=\vec{b}$ である．逆に，$\vec{x}=\vec{b}$ のとき，(1) から与えられた不等式は成立する．

以上より，題意は示された．（証明終）

◇ ♡

**解説**

内積の計算がメインの問題ですが，論証なので完答するのは難しいでしょう．

(1) は，不等式の証明なので左辺を条件式を用いて式変形するだけです．一般に $\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|$ が成り立つので，これを用いて示す必要があります．

(2) は，証明の方針を立てるのは難しく感じるでしょう．まず，与えられた不等式が $T$ 内の任意のベクトルに対して成り立つので，$\vec{t}=\vec{b}$ としても成り立つことが分かります．これは，具体的な値を用いて計算するのと同じで，$\vec{t}$ を具体的なベクトル $\vec{b}$ で置き換えて考えるのです．しかし，これでは必要性を満たしているに過ぎません．すなわち，$T$ 内のある一つのベクトルを考えれば $\vec{x}=\vec{b}$ になったといえますが，任意のベクトル $\vec{t}$ で成り立つ保障（十分性）がないわけです．したがって，最後に逆に $\vec{x}=\vec{b}$ のときも与えられた不等式は常に成り立つことを示さなければ減点されます．必要性と十分性が絡んだ問題は苦手としてる人が多いので，多くの問題を通して考え方を身につけておきましょう．

中心 O，半径 $a$，中心角 $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の扇形を OAB とする．A から半径 OB に下ろした垂線を $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{B_1}$ を通り弦 AB に平行な直線と半径 OA との交点を $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_1}$ から OB に下ろした垂線を $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{B_2}$ を通り AB に平行な直線と OA との交点を $\mathrm{A_2}$ とする．このように限りなく繰り返して，OA, OB 上にそれぞれ点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$ を作る．$\triangle\mathrm{ABB_1}$, $\triangle\mathrm{A_1B_1B_2}$, ……, $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$, …… の面積をそれぞれ $S_1$, $S_2$, ……, $S_{n+1}$, …… とするとき，次の問いに答えよ．

（1） 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 $S$ を求めよ．

（2） 扇形 OAB の面積を $T$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{S}{T}$ を求めよ．

中心 O，半径 $a$，中心角 $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の扇形を OAB とする．A から半径 OB に下ろした垂線を $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{B_1}$ を通り弦 AB に平行な直線と半径 OA との交点を $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_1}$ から OB に下ろした垂線を $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{B_2}$ を通り AB に平行な直線と OA との交点を $\mathrm{A_2}$ とする．このように限りなく繰り返して，OA, OB 上にそれぞれ点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$ を作る．$\triangle\mathrm{ABB_1}$, $\triangle\mathrm{A_1B_1B_2}$, ……, $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$, …… の面積をそれぞれ $S_1$, $S_2$, ……, $S_{n+1}$, …… とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 $S$ を求めよ．

(2)　扇形 OAB の面積を $T$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S}{T}$ を求めよ．

**【テーマ】：無限等比級数の和**

**方針**

第 $n$ 番目の図形を考えます．中心角が $\theta$ なので，三角比を用いて長さを求めましょう．

♣　♠

**解答**

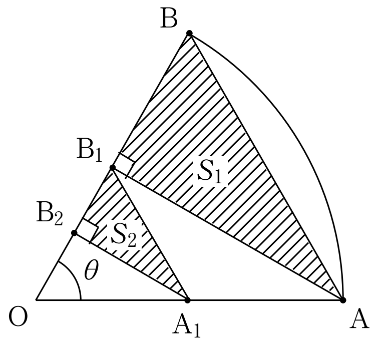
(1)　$\mathrm{OA}_n=a_n$ とおく．ただし，$\mathrm{OA_0}=\mathrm{OA}=a$ とする．

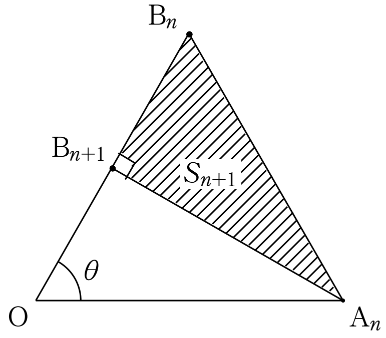
$\mathrm{OB}_{n+1}=a_n\cos\theta$ であるから，$\mathrm{OA}_{n+1}=a_n\cos\theta$ である．
したがって，

$$a_{n+1}=(\cos\theta)a_n$$

が成り立ち，$a_0=a$ であるから，$a_n=a\cos^n\theta$ である．

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{B}_n\cdot\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{OB}_{n-1}-\mathrm{OB}_n)\cdot\mathrm{OA}_{n-1}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}(a\cos^{n-1}\theta-a\cos^n\theta)\cdot a\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta\\&=\frac{a^2}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)\cos^{2(n-1)}\theta\end{aligned}$$




ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項 $S_1=\dfrac{a^2}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$，公比 $\cos^2\theta<1$ の無限等比級数の和となるので，収束してその和 $S$ は，

$$\begin{aligned}S&=\frac{\frac{a^2}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\\&=\boldsymbol{\frac{a^2\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(2)　$T=\dfrac{1}{2}a^2\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{S}{T}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{2}{a^2\theta}\cdot\frac{a^2\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

◇　♡

解説

ある規則にしたがって図形を作っていく問題は，等比数列が表れることが多くあります．その際に，辺の長さや面積を求めるため漸化式を立式します．これは，最初の数個の図形で勝手に等比数列であることを決めると減点の対象となるためです．漸化式を作れば等比数列であることもわかるし，一般項を求めることができます．こうして辺の長さや面積を計算します．漸化式を立式するときは，$n$ 番目と $n+1$ 番目の図形を考えて，それらの関係を式で表します．本問は，$\mathrm{OA}_n = a_n$ として，数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式を求めました．これは，辺の長さが分かれば面積が求められるためにこのように設定をしています．なお，(1) の解答は方針によっては，$\dfrac{a^2}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}$ となりますが，これも正解です．解答にある $\dfrac{a^2\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$ を 2 倍角や半角の公式を用いて式変形すると同値であることが分かります．

$a,\ b,\ c$ は $1<a<b<c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は $abc$ で割り切れるとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $ab+bc+ca-1$ は $abc$ で割り切れることを示せ．

（2） $a,\ b,\ c$ をすべて求めよ．

$a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は $abc$ で割り切れるとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $ab+bc+ca-1$ は $abc$ で割り切れることを示せ．

（2） $a, b, c$ をすべて求めよ．

**【テーマ】：整数問題**

方針

(1) は，与えられた条件式を変形することから示せます．(2) は，絞り込みの方法によって $a, b, c$ の値を確定していきましょう．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

題意より，$(ab-1)(bc-1)(ca-1) = kabc$（$k$ は整数）と置くことができるので，これを変形すると，

$$a^2b^2c^2 + (ab+bc+ca) - ab^2c - abc^2 - a^2bc - 1 = kabc$$

$$a^2b^2c^2 + (ab+bc+ca) - abc(a+b+c) - 1 = kabc$$

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-1 &= kabc - a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) \\ &= abc(k - abc + a + b + c) \end{aligned}$$

$k - abc + a + b + c$ は整数であるから，$ab+bc+ca-1$ は $abc$ の倍数となる．したがって，$abc$ で割り切れることが示された．　**（証明終）**

（2） $1 < a < b < c$ であることと，(1) の結果から，

$$ab+bc+ca-1 = pabc \quad (p \text{ は正の整数})$$

と置くことができる．$abc \neq 0$ であることから，

$$p = \frac{ab+bc+ca-1}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$$

である．$p$ は正の整数であるから，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$a \geqq 3$ とすると，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

となり，① に矛盾する．したがって，$a = 2$ である．このとき，① は，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 \iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \cdots\cdots ②$$

となる．同様に，$b \geqq 4$ とすると，

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

となり，② に矛盾する．したがって，$b = 3$ である．このとき，② は，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2} \iff \frac{1}{c}>\frac{1}{6}$$
$$\therefore \quad c<6$$

となる．したがって，$c$ のとり得る値は，$c=4,5$ である．

(i) $c=4$ のとき，

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 11\cdot 7$$

となり，$abc=2\cdot 3\cdot 4$ で割り切れないので不適.

(ii) $c=5$ のとき，

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=5\cdot 14\cdot 9$$

となり，$abc=2\cdot 3\cdot 5$ で割り切れるので，題意を満たす.

以上より，求める $a, b, c$ の値は，$\boldsymbol{a=2, b=3, c=5}$……(答)

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)=kabc$ ($k$ は整数) と置くことができるかどうかがポイントで，これを展開し式変形すれば，おのずと示せます．ただし，『$k-abc+a+b+c$ は整数であるから』という一言を忘れると減点されるので，注意が必要です.

(2) は，絞り込みを用いて $a, b, c$ の値を特定していきますが，解答中にある $p$ が正の整数であることがポイントとなります．これを用いて

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

という不等式が作れれば，具体的に絞り込みが行えます.

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} x^2 |\sin nx|\, dx$$

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx$$

**【テーマ】：定積分と極限**

**方針**

まずは，$|\sin nx|$ の角度に着目し，$nx=t$ と置換します．絶対値をどのようにはずすかがポイントです．

♣ ♠

**解答**

$nx=t$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{n}dt$ であるから，

| $x$ | $0 \to \pi$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \to n\pi$ |

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx &= \int_0^{n\pi}\frac{t^2}{n^2}|\sin t|\cdot\frac{1}{n}dt\\ &= \frac{1}{n^3}\int_0^{n\pi} t^2|\sin t|\,dt\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} t^2|\sin t|\,dt \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$t-k\pi=u$ とおくと，$dt=du$

| $t$ | $k\pi \to (k+1)\pi$ |
|---|---|
| $u$ | $0 \to \pi$ |

よって，① は次のように式変形できる．

$$\begin{aligned}① &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\sin(u+k\pi)|\,du\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\cos k\pi\sin u|\,du\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2\sin u\,du \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2\sin u\,du &= \Big[-(u+k\pi)^2\cos u\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2(u+k\pi)\cos u\,du\\ &= (\pi+k\pi)^2+k^2\pi^2+2\left\{\Big[(u+k\pi)\sin u\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin u\,du\right\}\\ &= (k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-2\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}\\ &= (k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4\end{aligned}$$

よって，② は次のように式変形できる．

$$② = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4\}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)^2\pi^2+k^2\pi^2-4\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi^2-\frac{4}{n^2}\right\}\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 \pi^2 x^2\,dx$$
$$= 2\pi^2\left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

$y = \sin nx$ は周期が $\dfrac{2\pi}{n}$ の関数です．積分区間が $0 \leqq x \leqq \pi$ なので，まずは角度を $nx = t$ と置きなおし，$y = \sin t$ で積分区間を $0 \leqq t \leqq n\pi$ とします．これは，$x$ 軸のスケールを変えていることを意味します．すなわち，横に伸ばして周期が $2\pi$ になるようにしただけです．これで積分区間を $n$ 個の区間に分けて和の形で表せば，絶対値がはずせるようになるのです．あとは，積分を計算し，区分求積法によって極限値を計算することができます．式変形に慣れていないと難しく感じる問題でしょう．

次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす 3 次関数 $y=f(x)$ を求めよ．

(i)　$f(0)=1$

(ii)　$f'(0)=f'(1)=-3$

(iii)　極大値と極小値が存在して，それらの差が極値をとる $x$ の値の差の絶対値に等しい．

次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす 3 次関数 $y=f(x)$ を求めよ．

(i) $f(0)=1$

(ii) $f'(0)=f'(1)=-3$

(iii) 極大値と極小値が存在して，それらの差が極値をとる $x$ の値の差の絶対値に等しい．

**【テーマ】：3 次関数の極値の差**

**方針**

まずは，条件 (ii) を用いて $f'(x)$ の形を決めます．次に，条件 (i) で $f(x)$ の形を決定し，最後に条件 (iii) で係数を決定します．

♣ ♠

**解答**

条件 (ii) より，

$$f'(0)+3=f'(1)+3=0$$

であるから，$f'(x)+3=0$ は $x=0,\,1$ を解に持つ．一方，$f(x)$ は 3 次式であるから，$f'(x)$ は 2 次式である．したがって，実数 $a$ を用いて，

$$f'(x)+3=ax(x-1)\quad(a\neq 0)$$

と表せる．よって，

$$f'(x)=ax^2-ax-3\ \cdots\cdots ①$$

$$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2-3x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

$f(0)=C$ であるから，条件 (i) より，$C=1$ である．ゆえに，

$$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2-3x+1$$

また，条件 (iii) より，極値が存在するので，① から，$ax^2-ax-3=0$ の判別式を $D$ とすると，

$$D=a^2+12a>0\quad\iff\quad a<-12,\ 0<a\ \cdots\cdots ②$$

$f'(x)=0$ の 2 解を $\alpha,\,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$x=\alpha,\,\beta$ で極値をもつので，条件 (iii) から，

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$$

ここで，左辺を計算すると，

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)|&=\left|\Big[\,f(x)\,\Big]_{\beta}^{\alpha}\right|\\&=\left|\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)\,dx\right|\\&=\left|a\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|\quad ☞\ \boxed{\text{解説}}\\&=\left|\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3\right|\end{aligned}$$

となり，$\beta-\alpha>0$ より，

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\beta-\alpha \iff |a|(\beta-\alpha)^2=6$$

$\alpha,\beta$ は $f'(x)=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-\frac{3}{a}$$

が成り立つ．したがって，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+\frac{12}{a}$$

よって，

$$|a|\left(1+\frac{12}{a}\right)=6$$

(ア) $a>0$ のとき，

$a\left(1+\dfrac{12}{a}\right)=6 \iff a=-6$ であり，これは不適.

(イ) $a<0$ のとき，

$-a\left(1+\dfrac{12}{a}\right)=6 \iff a=-18$ であり，これは ② も満たす.

以上より，求める 3 次関数 $y=f(x)$ は，

$$\boldsymbol{f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

まずは，条件 (ii) から $f'(x)$ の形を決定しますが，ここでは因数定理を利用します．$f'(0)+3=f'(1)+3=0$ のように，ある部分の数字だけが違う場合，その部分を $x$ に変えた式 $f'(x)+3=0$ を考えれば，$g(x)=f'(x)+3$ とでもおけば，$g(0)=g(1)=0$ となるので，因数定理より $g(x)$ は $x(x-1)$ を因数に持つことがわかります．しかし，これだけでは $g(x)$ の形は確定できません．$f'(x)$ が 2 次式であることから $g(x)=ax(x-1)$ とすることができるのです．したがって，その議論が欠落している場合は，減点対象となります．また，条件 (iii) をどのように使うかですが，3 次関数の極値の差は，解答のように定積分を用いて計算することができます．解答中の式変形ですが，$f'(x)=0$ の 2 解を $\alpha,\beta$ としているので，$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できます．この式変形が最大のポイントです．なお，2 次の係数を忘れないように付けておきましょう．まともに計算するのは大変なので，このような計算手法は知っておくとよいでしょう．

公式

**【定積分の公式】**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の 2 解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，$a$ がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 $a$ をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます.

$n$ を自然数とし，関数 $f_n(x) = \sin^{n+1} x$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における変曲点の $x$ 座標を $x_n$ とする．

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることは用いてよい．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)$ を求めよ．

(3)　点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における曲線 $y = f_n(x)$ の接線と $x$ 軸との交点を $\mathrm{P}_n$ とし，直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ との交点を $\mathrm{Q}_n$ とする．3 点 $\mathrm{P}_n$, $\mathrm{Q}_n$ および $\mathrm{R}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積を $S_n$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_n$ を求めよ．

$n$ を自然数とし，関数 $f_n(x) = \sin^{n+1} x$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における変曲点の $x$ 座標を $x_n$ とする.

(1) 極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ であることは用いてよい.

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{\pi}{2} - x_n\right)$ を求めよ.

(3) 点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における曲線 $y = f_n(x)$ の接線と $x$ 軸との交点を $\mathrm{P}_n$ とし，直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ との交点を $\mathrm{Q}_n$ とする．3 点 $\mathrm{P}_n$, $\mathrm{Q}_n$ および $\mathrm{R}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積を $S_n$ とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_n$ を求めよ.

**【テーマ】：関数の極限**

**方針**

変曲点の $x$ 座標は $f''(x) = 0$ を満たす $x$ の値を考えます．(2) では $\theta_n = \dfrac{\pi}{2} - x_n$ とおいて $\theta_n$ の極限を考えます．(3) では，うまく式を変形して (1), (2) の結果を利用しましょう.

♣ ♠

**解答**

(1) $f_n'(x) = (n+1)\sin^n x\cos x$ であるから，

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= (n+1)\left\{n\sin^{n-1}x\cos^2 x + \sin^n x(-\sin x)\right\} \\ &= (n+1)\left\{n\sin^{n-1}x(1-\sin^2 x) - \sin^{n+1}x\right\} \\ &= (n+1)\sin^{n-1}x\left\{n-(n+1)\sin^2 x\right\} \end{aligned}$$

よって，$f_n''(x) = 0$ のとき，$\sin x = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ ($\because$ $\sin x > 0$) であり，この値の前後で $f_n''(x)$ の符号が変化するので，$x$ がこの値を満たすとき変曲点となる．したがって，

$$\sin x_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\sin^{n+1}x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right\}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\pi}{2} - x_n = \theta_n$ とおくと，

$$\sin\theta_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) = \cos x_n = \sqrt{1-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$ を得る.

$$\begin{aligned} \therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\theta_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n} = \mathbf{1} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)　点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における接線の方程式は，

$$y = f_n'(x_n)(x - x_n) + f_n(x_n)$$

であり，$\mathrm{P}_n(p_n,\ 0)$ とおくと，

$$0 = f_n'(x_n)(p_n - x_n) + f_n(x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad p_n = x_n - \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}$$

である．また，$\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{\pi}{2},\ q_n\right)$ とおくと，

$$q_n = f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)$$

よって，

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - p_n\right)q_n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - p_n\right)\left\{f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x_n + \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}\right)\left\{f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x_n + \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}\right)^2 f_n'(x_n)
\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)} = \frac{\sin^{n+1} x_n}{(n+1)\sin^n x_n \cos x_n} = \frac{\sin x_n}{(n+1)\cos x_n} = \frac{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}}{(n+1)\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$f_n'(x_n) = (n+1)\sin^n x_n \cos x_n = (n+1)\sin^{n+1} x_n \cdot \frac{\cos x_n}{\sin x_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{2}\left(\theta_n + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\theta_n + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\theta_n + \frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{n} f_n(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\theta_n + \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) f_n(x_n)
\end{aligned}$$

ここで，(1), (2) の結果より，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}S_n = \frac{1}{2}(1+1)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{e}}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

◇　♡

解説

(1) は，変曲点の $x$ 座標を求めますが，$f''(x) = 0$ となる $x$ で変曲点をもつとは限りません．その $x$ の値の前後で $f''(x)$ の符号が変化するとき変曲点と呼びます．したがって，その確認をするか増減表をかいておくべきでしょう．

(2) は，$\dfrac{\pi}{2} - x_n = \theta_n$ とおくことがポイントです．$\theta_n$ の極限が求められるので，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$ を用います．

(3) は，式変形が大変な問題です．(1), (2) の結果を利用するためにはどのように式を変形するかを考えます．入試問題は，前問の結果を利用して解答するという流れが多いので，つまずいたら前問の結果が使えるかどうかを考えましょう．

正の整数 $n$ に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく．等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

正の整数 $n$ に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく．等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

**【テーマ】：数学的帰納法**

**方針**

$n=k+1$ のときの和の計算方法を工夫する必要があります．

♣ ♠

**解答** **【証明】**

(i) $n=1$ のとき，

$$S(1)=\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$T(1)=\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$$

よって，$n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$S(k)=T(k)$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}S(k+1)&=\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\\&=\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}+\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}\\&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\quad(\because\ \ S(k)=T(k))\\&=\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{k+1+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=\left(\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}=T(k+1)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，すべての自然数 $n$ に対して $S(k)=T(k)$ が成り立つことが示された． **(証明終)**

♢ ♡

**解説**

$n=k+1$ のときを示す際は，和の計算をうまく行う必要があります．解答では，

$$\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}\ \text{から}\ \sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}$$

の形を作っています．これは，一度和を書き下して一般項の形を取り直します．慣れればそれほど難しくないですが，慣れないうちは変形に苦労するかもしれません．

$n$ を 3 以上の整数とし，$n$ 個の整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は以下の 3 条件を満たすとする．

条件（1）： $a_1 \geqq 2$

条件（2）： $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$

条件（3）： $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす任意の整数 $i,\ j$ に対して，不等式

$$a_i + a_j > 0$$

が成り立つ．

このとき，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$$

が成り立つことを証明せよ．また，この不等式において等号が成り立つ場合の $n$ の値，および $n$ 個の整数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ をすべて求めよ．

$n$ を 3 以上の整数とし，$n$ 個の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は以下の 3 条件を満たすとする．

条件 (1) ： $a_1 \geqq 2$

条件 (2) ： $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$

条件 (3) ： $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす任意の整数 $i, j$ に対して，不等式

$$a_i + a_j > 0$$

が成り立つ．

このとき，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$$

が成り立つことを証明せよ．また，この不等式において等号が成り立つ場合の $n$ の値，および $n$ 個の整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ をすべて求めよ．

**【テーマ】：不等式の証明**

**方針**

条件 (2), (3) から $a_{n-1} > 0$ が導かれます．等号が成り立つのは，$n$ 個の数字の和が $n$ のときなので，$n$ 個の数字のほとんどが 1 であるという予想が立ちます．

♣ ♠

**解答**

**【証明】**

条件 (2), (3) より，

$$a_{n-1} \geqq a_n\ ,\quad a_{n-1} + a_n > 0 \cdots\cdots ①$$

であるから，

$$-a_{n-1} < a_n \leqq a_{n-1}$$

したがって，$-a_{n-1} < a_{n-1}$ より $a_{n-1} > 0$ を得る．$a_{n-1}$ は整数であるから，この式は $a_{n-1} \geqq 1$ と同値である．
また，条件 (1), (2) より，

$$a_1 \geqq 2,\quad a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_{n-1} \geqq 1$$

① より $a_{n-1} + a_n \geqq 1$ が成り立つ．

(i) $n = 3$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (a_2 + a_3) \geqq 2 + 1 = 3$$

ここで，等号は $a_1 = 2,\ a_2 + a_3 = 1$ のとき，すなわち

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 0), (2, 2, -1)$$

のとき成立する．

(ii) $n \geqq 4$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + (a_{n-1} + a_n) \geqq 2 + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{n-3\text{ 個}} + 1 = n$$

ここで，等号は $a_1 = 2,\ a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_{n-2} = 1,\ a_{n-1} + a_n = 1$ のとき，すなわち

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n) = (2,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0)$$

のとき成立する．

以上より，$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$ が示された． **（証明終了）**

また，等号成立条件は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n = 3\ \text{のとき，}\quad (a_1,\ a_2,\ a_3) = (2,\ 1,\ 0),\ (2,\ 2,\ -1)} \\ \boldsymbol{n \geqq 4\ \text{のとき，}\quad (a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n) = (2,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0)} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

**解説**

最初のきっかけをつかむのが難しい問題ですが，このような場合は $n$ を具体的に決めて少し実験をしてみます．例えば，$n = 3,\ 4,\ 5$ としてみて，条件を満たす整数を考えてみます．そこから解答のヒントを得ましょう．入試問題の中には，この実験を小問として問い，ヒントを与えてくれる場合もありますが，本問のように自分で行わなければならない問題もあります．何をやってよいか分からない問題に直面したときには，実験をする癖をつけておきましょう．

3 枚のコイン P, Q, R がある．P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ $p, q, r$ とする．このとき次の操作を $n$ 回繰り返す．まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ．次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中に入れる．

(1) $n$ 回ともコイン Q を選び，つぼの中には $k$ 個の赤玉が入っている確率を求めよ．

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ．

(3) $n = 2004,\ p = \dfrac{1}{2},\ q = \dfrac{1}{2},\ r = \dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ．

3 枚のコイン P, Q, R がある．P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ $p$, $q$, $r$ とする．このとき次の操作を $n$ 回繰り返す．まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ．次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中に入れる．

(1) $n$ 回ともコイン Q を選び，つぼの中には $k$ 個の赤玉が入っている確率を求めよ．

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ．

(3) $n=2004$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ．

**【テーマ】：確率の最大値**

**方針**

前半は反復試行の確率で，後半が確率の最大値を求める問題です．$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べます．

♣ ♠

**解答**

(1) P を投げて $n$ 回とも表が出る確率は $p^n$ であり，次に Q を $n$ 回投げたとき表が $k$ 回出る確率は，

$${}_n\mathrm{C}_k q^k(1-q)^{n-k}$$

である．ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{p^n \cdot {}_n\mathrm{C}_k q^k(1-q)^{n-k}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(2) 1 回の試行で赤玉をつぼに入れるのは，

(i) P を投げて表が出て，Q を投げて表が出る

(ii) P を投げて裏が出て，R を投げて表が出る

のいずれかより，その確率を $a$ とすると，

$$a = pq + (1-p)r$$

であるから，求める確率は，

$$a^n = \boldsymbol{\{pq+(1-p)r\}^n} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3) (2) より

$$a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

よって，つぼの中に赤玉が $k$ 個入っている確率 $P_k$ は，

$$\begin{aligned} P_k &= {}_n\mathrm{C}_k a^k(1-a)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}a^k(1-a)^{n-k} \end{aligned}$$

ゆえに，$P_k$ が最大となるときを考えればよい．

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{n!a^{k+1}(1-a)^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!a^k(1-a)^{n-k}}$$

$$= \frac{a(n-k)}{(k+1)(1-a)}$$
$$= \frac{\frac{7}{20}(2004-k)}{(k+1)\cdot\frac{13}{20}}$$
$$= \frac{7(2004-k)}{13(k+1)}$$

であるから，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ となるときを考えると，

$$\begin{aligned}\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{7(2004-k)}{13(k+1)} > 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 7(2004-k) > 13(k+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad 20k < 14015 \\ &\Longleftrightarrow \quad k < \frac{14015}{20} = 700.75\end{aligned}$$

よって，

$0 \leqq k \leqq 700$ のとき，　$P_k < P_{k+1}$

$701 \leqq k$ のとき，　　$P_k > P_{k+1}$

であるから，

$$P_0 < P_1 < \cdots\cdots < P_{700} < P_{701} > P_{702} > \cdots\cdots$$

となり，$k = 701$ のとき $P_k$ は最大となる．ゆえに，

**つぼの中に 701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい……(答)**

◇　　♡

解説

確率の最大値・最小値は，頻出の問題です．誘導してくれている場合もありますが，誘導なしでも自分で求められるようになっていなければいけません．なお，最小値の場合は，

$$P_0 > P_2 > \cdots\cdots P_{l-1} > P_l < P_{l+1} < \cdots\cdots$$

となり，$k = l$ のとき，$P_k$ は最小になります．

$P_k$ が階乗を含む式になるので，このままでは $P_k$ の最大値が求められません．そこで，次のように考えて最大となる $k$ を決定します．

$$P_{k+1} < P_k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \quad \cdots\cdots①$$
$$P_{k+1} = P_k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P_{k+1}}{P_k} = 1 \quad \cdots\cdots②$$
$$P_{k+1} > P_k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad \cdots\cdots③$$

このように，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べることで，$P_{k+1}$ と $P_k$ の大小関係がわかるのです．しかも $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ のように分数計算にすることで，階乗が消えるというメリットもあります．あとは，①, ②, ③ をみたす自然数 $k$ の値を求めて，それに基づいて

$$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l > P_{l+1} > \cdots\cdots$$

となるような $l$ を求めれば，$k = l$ のとき，$P_k$ は最大になるというわけです．

✐**注** ： $P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l = P_{l+1} > P_{l+2} > \cdots\cdots$ のように最大となる $k$ が 2 つ存在することもあります．

$a > 1$ を定数とする．$x > 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，すべての $x > 0$ に対して $\displaystyle\int_x^{ax} f(t)\,dt = k$ を満たすとする．ただし，$k$ は定数である．

(1) $f(ax) = \dfrac{1}{a} f(x)$ であることを証明せよ.

(2) $g(x) = xf(x)$ とするとき，$g(ax)$ を $g(x)$ を用いて表せ.

(3) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$g\left(\dfrac{1}{a^n} x\right)$ を $g(x)$ を用いて表せ.

(4) さらに $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x \to +0} xf(x) = 1$ を満たすとする.

(a) $g(x)$ を求めよ.

(b) $f(x)$ を求めよ.

(c) 定数 $k$ を $a$ を用いて表せ.

$a>1$ を定数とする．$x>0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，すべての $x>0$ に対して $\displaystyle\int_x^{ax} f(t)\,dt=k$ を満たすとする．ただし，$k$ は定数である．

(1)　$f(ax)=\dfrac{1}{a}f(x)$ であることを証明せよ．

(2)　$g(x)=xf(x)$ とするとき，$g(ax)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

(3)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$g\left(\dfrac{1}{a^n}x\right)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

(4)　さらに $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to+0}xf(x)=1$ を満たすとする．

(a)　$g(x)$ を求めよ．

(b)　$f(x)$ を求めよ．

(c)　定数 $k$ を $a$ を用いて表せ．

**【テーマ】：積分方程式**

**方針**

(1) は，微分積分学の基本定理を用いて示すことができます．(2) 以降は，前問の結果をうまく利用しましょう．

♣　♠

**解答**

(1)　**【証明】**

$\displaystyle\int_x^{ax} f(t)\,dt=k$ の両辺を $x$ で微分すると，

$$f(ax)\cdot a-f(x)=0 \iff f(ax)=\frac{1}{a}f(x)$$

ゆえに，示された．　**(証明終)**

(2)　**【証明】**

$g(ax)=axf(ax)=xf(x)=g(x)$　($\because$　(1))

ゆえに，示された．　**(証明終)**

(3)　(1) で $x$ に $\dfrac{1}{a}x$ を代入すると，

$$f(x)=\frac{1}{a}f\left(\frac{1}{a}x\right) \iff f\left(\frac{1}{a}x\right)=af(x)$$

よって，

$$g\left(\frac{1}{a^n}x\right)=\frac{1}{a^n}xf\left(\frac{1}{a^n}x\right)=\frac{1}{a^n}xa^nf(x)=g(x)$$

ゆえに，$\boldsymbol{g\left(\dfrac{1}{a^n}x\right)=g(x)}$……(答)

(4)

(a)　題意より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ …… ①

が成り立ち，$a>1$ より $x$ によらず

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}x=0$$

である．よって，(3) の結果と ① から

$$g(x)=\lim_{x\to+0}g(x)=\mathbf{1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(b)　(a) と (2) より，$xf(x)=1$ であり，$x>0$ より，

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{1}{x}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(c)　与えられた等式と，(b) より，

$$\begin{aligned}k&=\int_x^{ax}\frac{1}{t}\,dt\\&=\Big[\log|t|\Big]_x^{ax}\\&=\log(ax)-\log x\\&=\boldsymbol{\log a}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇　　　　♡

**解説**

関数方程式と似た部分があります．(1) は，次の微分積分学の基本定理を用いて示せば容易に解答できます．(2) 以降は，前問の結果を利用するので問題の流れをしっかりとつかみましょう．

**公式**　**【微分積分学の基本定理】**

$a$ を定数．$x$ は $t$ に無関係な変数．$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

（i）　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

（ii）　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

100 枚のカードに，1 から 100 までの番号がつけられている．これらのカードをすべて袋に入れる．この袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を $X$ とする．取り出したカードを袋に戻し，再び袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を $Y$ とする．このとき次の問いに答えよ．

（1） $X+Y$ が偶数となる確率を求めよ．

（2） $X+Y \leqq 5$ となる確率を求めよ．

（3） $X+Y \leqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{4}$ であるような自然数 $n$ は存在しないことを示せ．

100 枚のカードに，1 から 100 までの番号がつけられている．これらのカードをすべて袋に入れる．この袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を $X$ とする．取り出したカードを袋に戻し，再び袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を $Y$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$X+Y$ が偶数となる確率を求めよ．

(2)　$X+Y \leqq 5$ となる確率を求めよ．

(3)　$X+Y \leqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{4}$ であるような自然数 $n$ は存在しないことを示せ．

**【テーマ】：確率の基本性質**

方針

(1), (2) は具体的に考えてもできますが，(3) は格子点の問題として処理をします．

♣　♠

**解答**

(1)　$X+Y$ が偶数となるのは，

(i)　$X$, $Y$ がともに偶数

(ii)　$X$, $Y$ がともに奇数

のいずれかであるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$X=k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のとき，$X+Y \leqq 5$ となる $Y$ は，

$$1 \leqq Y \leqq 5-k$$

であるから，$5-k$ 通りある．よって，$X+Y \leqq 5$ を満たす $X$, $Y$ の組は，

$$\sum_{k=1}^{4}(5-k)=4+3+2+1=10\ (\text{個})$$

ある．したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{100^2}=\mathbf{\frac{1}{1000}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　**【証明】**

$X+Y \leqq n$ となる自然数 $X$, $Y$ の総数は，

$$1 \leqq X \leqq 100 \text{ かつ } 1 \leqq Y \leqq 100 \text{ かつ } X+Y \leqq n$$

が表す領域の格子点の個数に等しく，その個数を $f(n)$ とすると，$X+Y \leqq n$ となる確率 $P_n$ は，

$$P_n=\frac{f(n)}{100^2}$$

である．

(i)　$n=1$ のとき，

$$P_1=\frac{f(1)}{100^2}=0 \neq \frac{1}{4}$$

である．

(ii) $2 \leqq n \leqq 101$ のとき，$X = k$ における格子点の個数が $n - k$ より，

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

であるから，

$$P_n = \frac{n(n-1)}{20000}$$

であり，$P_n = \frac{1}{4}$ のとき，

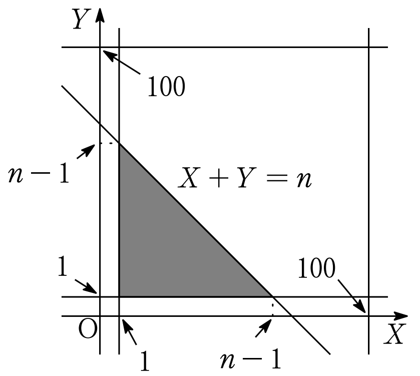
$$n(n-1) = 5000 \cdots\cdots ①$$

である．ここで，

$$71 \cdot 70 = 4970 < 5000$$

$$72 \cdot 71 = 5112 > 5000$$

であるから，① を満たす自然数 $n$ は存在しない．




(iii) $n \geqq 102$ のとき，

$$f(n) > f(101) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 > \frac{100^2}{2}$$

であるから，

$$P_n = \frac{f(n)}{100^2} > \frac{\frac{100^2}{2}}{100^2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

であり，$P_n = \frac{1}{4}$ となる自然数 $n$ は存在しない．

以上より，$X + Y \leqq n$ となる確率が $\frac{1}{4}$ となるような自然数 $n$ は存在しないことが示された．　　**(証明終)**

◇　　♡

**解説**

(1)，(2) は具体的に書き出しても解答できますが，(3) は自然数 $n$ を相手にするので，具体的に書き出すわけにはいきません．そこで格子点を考えて，処理をすると方針が立ちます．場合分けを行っているのは，領域が $2 \leqq n \leqq 101$ のときと $n \geqq 102$ のときで変化するからです．$n = 1$ は確率が 0 となるので，別で考えた方がよいでしょう．

$f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とし，曲線 $C : y = f(x)$ を考える．$a > 0$ のとき，曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を $\ell$ とし，点 P を通り接線 $\ell$ に垂直な直線を $m$ とする．次の問いに答えよ.

(1)　直線 $\ell$ と $m$ の方程式を求めよ.

(2)　直線 $\ell, m$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ.

(3)　(2) で求めた $V$ を最小にする $a$ の値を求めよ.

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とし，曲線 $C : y=f(x)$ を考える．$a>0$ のとき，曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線を $\ell$ とし，点 P を通り接線 $\ell$ に垂直な直線を $m$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $\ell$ と $m$ の方程式を求めよ．

(2) 直線 $\ell, m$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $V$ を最小にする $a$ の値を求めよ．

**【テーマ】：最大値・最小値**

**方針**

(1) は，接線と法線を公式を用いて求めます．(2) は，回転体が円錐を 2 つ合わせたものなので，円錐の体積公式から求まります．(3) は，微分して最小にする $a$ の値を増減表から求めます．

♣ ♠

**解答**

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より，直線 $\ell$ の方程式は，

$$y=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})(x-a)+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\ell : y=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x-\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，法線 $m$ の方程式は，

$$y=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}(x-a)+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{m : y=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}x+\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\ell$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，

$$0=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x-\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

$$\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})x=\frac{a}{2}(e^a-e^{-a})-\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

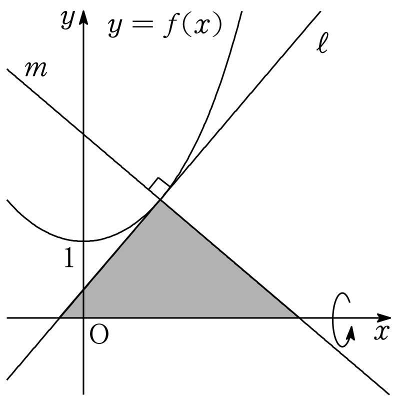
$$\therefore\ x=a-\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}$$

であり，$m$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，

$$0=-\frac{2}{e^a-e^{-a}}x+\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

$$\frac{2}{e^a-e^{-a}}x=\frac{2a}{e^a-e^{-a}}+\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})$$

$$\therefore\ x=a+\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}$$




よって，回転体の体積 $V$ は，

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2\left\{\left(a+\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}\right)-\left(a-\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\left(\frac{(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})}{4}+\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2\cdot\frac{(e^a-e^{-a})^2(e^a+e^{-a})+4(e^a+e^{-a})}{4(e^a-e^{-a})}$$

$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2 \cdot \frac{(e^a+e^{-a})\{(e^a-e^{-a})^2+4\}}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \frac{\pi}{12}(e^a+e^{-a})^2 \cdot \frac{(e^a+e^{-a})(e^a+e^{-a})^2}{4(e^a-e^{-a})}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(e^a+e^{-a})^5}{48(e^a-e^{-a})}\pi} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3) (2) で求めた $V$ を $a$ で微分すると，

$$V' = \frac{\pi}{48} \cdot \frac{5(e^a+e^{-a})^4(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^5(e^a+e^{-a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{48} \cdot \frac{(e^a+e^{-a})^4\{5(e^a-e^{-a})^2-(e^a+e^{-a})^2\}}{(e^a-e^{-a})^2}$$
$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{(e^a+e^{-a})^4(e^{2a}-3+e^{-2a})}{(e^a-e^{-a})^2}$$

$V'=0$ のとき，$e^a+e^{-a}>0$ より，

$$e^{2a}-3+e^{-2a}=0 \iff e^{4a}-3e^{2a}+1=0$$
$$\therefore\ e^{2a}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$a>0$ より $e^{2a}>1$ であるから，$e^{2a}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ である．$e^a>0$ より，

$$e^a=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \iff a=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

よって，増減表は次のようになる．

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $V'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $V$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

したがって，$V$ を最小にする $a$ の値は，$\boldsymbol{a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ……(答)

◇ ♡

解説

(2) は，回転体の体積ですが，積分するのではなく円錐の体積公式を用いましょう．(3) は，$V$ の最小値を与える $a$ の値を求める問題ですが，実際に最小値を求めることもできるので，求めておきます．

$e^{2a}+e^{-2a}=3$ より，$(e^a+e^{-a})^2=5$ で，$e^a+e^{-a}>0$ より，

$$e^a+e^{-a}=\sqrt{5}$$

であり，

$$(e^a-e^{-a})^2=e^{2a}-2+e^{-2a}=1$$

であるから，$e^a-e^{-a}>0$ より，$e^a-e^{-a}=1$ を得る．したがって，$a=\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，$V$ は最小値

$$V=\frac{\pi}{48}\cdot\frac{(\sqrt{5})^5}{1}=\frac{25\sqrt{5}}{48}\pi$$

をとる．

$xy$ 平面上に曲線 $C : y = x^2 - \dfrac{5}{4}$ がある．$C$ 上の異なる 2 点 P, Q の $x$ 座標を $p$, $q$ とする．P, Q における $C$ の 2 本の接線の交点を R とし，3 点 P, Q, R を通る円の中心の座標を $(X, Y)$ とする．

(1)　$X$, $Y$ を $p$, $q$ で表せ．

(2)　$p - q = 1$ のとき，$X^2$ を $Y$ の式で表せ．

$xy$ 平面上に曲線 $C : y = x^2 - \dfrac{5}{4}$ がある．$C$ 上の異なる 2 点 P, Q の $x$ 座標を $p, q$ とする．P, Q における $C$ の 2 本の接線の交点を R とし，3 点 P, Q, R を通る円の中心の座標を $(X, Y)$ とする．

(1)　$X, Y$ を $p, q$ で表せ．

(2)　$p - q = 1$ のとき，$X^2$ を $Y$ の式で表せ．

**【テーマ】：放物線と直線**

**方針**

外心は，各辺の垂直二等分線の交点です．

♣ ♠

**解答**

(1)　$y' = 2x$ より，点 P における接線 $\ell$ の方程式は，

$$y = 2p(x - p) + p^2 - \frac{5}{4} \iff y = 2px - p^2 - \frac{5}{4}$$

同様にして，点 Q における接線 $m$ の方程式は，

$$y = 2qx - q^2 - \frac{5}{4}$$

よって，$\ell, m$ の交点の $x$ 座標は，

$$2px - p^2 - \frac{5}{4} = 2qx - q^2 - \frac{5}{4} \iff 2(p - q)x = p^2 - q^2$$

$p \neq q$ であるから，$x = \dfrac{p+q}{2}$ を得る．ゆえに，点 R の座標は，

$$\mathrm{R}\left(\frac{p+q}{2},\quad pq - \frac{5}{4}\right)$$

外心は，各辺の垂直二等分線の交点であるから，線分 PQ と線分 PR の垂直二等分線を求める．直線 PQ の傾きは，$p + q$ で，線分 PQ の中点は，$\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2-\frac{5}{2}}{2}\right)$ であるから，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{p+q}\left(x - \frac{p+q}{2}\right) + \frac{p^2+q^2-\frac{5}{2}}{2}$$

$$\therefore\quad y = -\frac{1}{p+q}x + \frac{2p^2+2q^2-3}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

また，直線 PR の傾きは，$2p$ で，線分 PR の中点は，$\left(\dfrac{3p+q}{4},\ \dfrac{p^2+pq-\frac{5}{2}}{2}\right)$ であるから，線分 PR の垂直二等分線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2p}\left(x - \frac{3p+q}{4}\right) + \frac{2p^2+2pq-5}{4}$$

$$\therefore\quad y = -\frac{1}{2p}x + \frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② の交点が $(X, Y)$ であるから，

$$-\frac{1}{p+q}X + \frac{2p^2+2q^2-3}{4} = -\frac{1}{2p}X + \frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p}$$

$$\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{p+q}\right)X=\frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p}-\frac{2p^2+2q^2-3}{4}$$

$$\frac{p+q-2p}{2p(p+q)}X=\frac{4p^3+4p^2q-7p+q-4p^3-4pq^2+6p}{8p}$$

$$\frac{-(p-q)}{2p(p+q)}X=\frac{4pq(p-q)-(p-q)}{8p}$$

$$\frac{-(p-q)}{2p(p+q)}X=\frac{(p-q)(4pq-1)}{8p}$$

$$\frac{-1}{p+q}X=\frac{4pq-1}{4}\quad(\because\ \ p\fallingdotseq q)$$

$$\therefore\quad X=\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}$$

このとき，

$$Y=-\frac{1}{p+q}\cdot\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}+\frac{2p^2+2q^2-3}{4}=\frac{(p+q)^2-2}{2}$$

であるから，

$$\boldsymbol{X=\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}}\ \boldsymbol{,}\quad \boldsymbol{Y=\frac{(p+q)^2-2}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$p-q=1$ のとき，$p=1+q$ であるから，(1) より，

$$X=\frac{\{1-4q(1+q)\}(1+2q)}{4}\ ,\quad Y=\frac{(1+2q)^2-2}{2}$$

よって，$(1+2q)^2=2(Y+1)$ より，$2q=\sqrt{2(Y+1)}-1$ を得るので，

$$\begin{aligned}X^2&=\frac{\{1-2q(2+2q)\}^2(1+2q)^2}{16}\\&=\frac{\left(1-\{\sqrt{2(Y+1)}-1\}\{\sqrt{2(Y+1)}+1\}\right)^2\cdot 2(Y+1)}{16}\\&=\frac{\left(1-\{2(Y+1)-1\}\right)^2(Y+1)}{8}\\&=\frac{4Y^2(Y+1)}{8}\\&=\boldsymbol{\frac{Y^2(Y+1)}{2}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇　　　　♡

解説

外心は，各辺の垂直二等分線の交点です．それ以外にも 3 点 P, Q, R から等距離にある点という考え方もありますが，前者の方が計算が楽でしょう．それさえ分かれば，方針は比較的見つけ易いので，あとは計算力が必要になる問題です．正確な計算ができるようにしましょう．

空間内に OA $=$ OB $=$ OC $= 1$ である四面体 OABC があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{2}{3},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{6},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}$$

を満たしている．また，△OAB, △OBC の重心をそれぞれ D, E とし，正の数 $t$ に対して，線分 AE, CD を $1:t$ に内分する点をそれぞれ M, N とする．さらに，直線 OM, ON と平面 ABC の交点をそれぞれ P, Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） 4 点 A, C, M, N は同一平面上にあることを証明せよ．

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $t$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

（3） 3 点 O, P, Q が直角三角形の 3 頂点になるときの $t$ の値をすべて求めよ．

空間内に OA $=$ OB $=$ OC $=1$ である四面体 OABC があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{2}{3},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{6},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}$$

を満たしている．また，△OAB, △OBC の重心をそれぞれ D, E とし，正の数 $t$ に対して，線分 AE, CD を $1:t$ に内分する点をそれぞれ M, N とする．さらに，直線 OM, ON と平面 ABC の交点をそれぞれ P, Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） 4 点 A, C, M, N は同一平面上にあることを証明せよ．

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $t,\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ．

（3） 3 点 O, P, Q が直角三角形の 3 頂点になるときの $t$ の値をすべて求めよ．

**【テーマ】：内積の計算**

方針

(1), (2) は，共面条件を利用します．(3) は直角三角形なので内積を利用しますが，3 通り考えられるので場合分けを行います．

♣ ♠

**解答**

（1） **【証明】**

点 D, E はそれぞれ △OAB, △OBC の重心であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

である．一方，点 M, N はそれぞれ線分 AE, CD を $1:t$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{t\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{t+1}=\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3(t+1)}\qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{t\vec{c}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{t+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3(t+1)}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1-3t}{3(t+1)}\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=\frac{3t-1}{3(t+1)}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{MN}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．ゆえに，4 点 A, C, M, N は同一平面上にあることが示された． **（証明終）**

（2） 題意より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$（$k$ は実数）とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3tk}{3(t+1)}\vec{a}+\frac{k}{3(t+1)}\vec{b}+\frac{k}{3(t+1)}\vec{c}$$

であり，4 点 P, A, B, C が同一平面上にあることから，

$$\frac{3tk}{3(t+1)}+\frac{k}{3(t+1)}+\frac{k}{3(t+1)}=1 \iff k=\frac{3(t+1)}{3t+2}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3t+2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = l\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ ($l$ は実数) とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{l}{3(t+1)}\vec{a} + \frac{l}{3(t+1)}\vec{b} + \frac{3tl}{3(t+1)}\vec{c}$$

であり，4 点 Q, A, B, C が同一平面上にあることから，

$$\frac{l}{3(t+1)} + \frac{l}{3(t+1)} + \frac{3tl}{3(t+1)} = 1 \iff l = \frac{3(t+1)}{3t+2}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}$ である．ただし，$t \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$ である．

(ⅰ)　$\angle \mathrm{POQ} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ より，

$$\left(\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}\right) = 0 \iff \left(3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}\right) = 0$$

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{2}{3},\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \dfrac{1}{6},\ \vec{c}\cdot\vec{a} = -\dfrac{1}{2}$ を用いて展開し整理すると，

$$-\frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t = 0 \iff t = 0,\ 1$$

(ⅱ)　$\angle \mathrm{QPO} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ より，

$$\left(-\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(\frac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}\right) = 0 \iff \left(3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right) = 0$$

(ⅰ) と同様にして，

$$\frac{9}{2}t - \frac{7}{3} = 0 \iff t = \frac{14}{27}$$

(ⅲ)　$\angle \mathrm{OQP} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$ より，

$$\left(-\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(-\frac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}\right) = 0 \iff \left(\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right) = 0$$

(ⅰ) と同様にして，

$$\frac{9}{2}t - \frac{2}{3} = 0 \iff t = \frac{4}{27}$$

(ⅰ)〜(ⅲ) と $t > 0$ であることから，求める $t$ の値は，

$$\boldsymbol{t = 1,\ \frac{4}{27},\ \frac{14}{27}} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

**解説**

共面条件と内積の計算がメインの計算問題です．丁寧な計算を心がけましょう．(3) では，△OPQ が直角三角形になるのは，3 通り考えられるので，場合分けが必要になります．

曲線 $(1+a^2)x^2+y^2-2axy+(2a-4)x-2y+1=0$ ($a$ は定数) について，次の問いに答えよ.

(1) この曲線の囲む面積を求めよ.

(2) この曲線が $x$ 軸と交わらないのは，$a$ がどんな範囲にあるときか.

(3) $a=1$ のとき，この曲線が $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

曲線 $(1+a^2)x^2+y^2-2axy+(2a-4)x-2y+1=0$ ($a$ は定数) について，次の問いに答えよ.

(1)　この曲線の囲む面積を求めよ.

(2)　この曲線が $x$ 軸と交わらないのは，$a$ がどんな範囲にあるときか.

(3)　$a=1$ のとき，この曲線が $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

**【テーマ】：回転体の体積**

方針

与えられている曲線の方程式は，その形から楕円であると推測できるので，$y$ の式と見なして方程式を解きます.
(3) は (2) がヒントになっています.

解答

(1)　与えられた方程式を $y$ について整理すると，

$$y^2-2(ax+1)y+(a^2+1)x^2+(2a-4)x+1=0$$

$y$ について解くと，

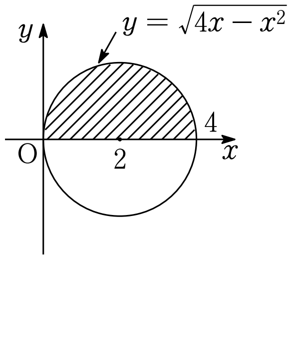
$$\begin{aligned} y &= ax+1\pm\sqrt{(ax+1)^2-\{(a^2+1)x^2+(2a-4)x+1\}} \\ &= ax+1\pm\sqrt{a^2x^2+2ax+1-(a^2x^2+x^2+2ax-4x+1)} \\ &= ax+1\pm\sqrt{4x-x^2} \end{aligned}$$

よって，$x$ のとり得る値の範囲は，$4x-x^2\geqq 0$ から，

$$0\leqq x\leqq 4$$

である．ゆえに，求める面積 $S$ は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left\{ax+1+\sqrt{4x-x^2}-\left(ax+1-\sqrt{4x-x^2}\right)\right\}dx \\ &= \int_0^4 2\sqrt{4x-x^2}\,dx \end{aligned}$$




ここで，$\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\,dx$ は，右図斜線部分の面積を表しているので，

$$S=2\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{4\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　与えられた方程式で $y=0$ とすると，

$$(a^2+1)x^2+2(a-2)x+1=0$$

となり，$x$ 軸と交わらないためには，この $x$ に関する方程式が実数解を持たなければよい．よって，判別式を $D$ とすると，

$$D/4=(a-2)^2-(a^2+1)<0 \iff -4a+3<0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a>\frac{3}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$a=1$ のとき，(2) よりこの曲線は $x$ 軸と共有点を持たないので，求める回転体の体積 $V$ は，

$$V=\pi\int_0^4\left\{\left(x+1+\sqrt{4x-x^2}\right)^2-\left(x+1-\sqrt{4x-x^2}\right)\right\}dx$$
$$=\pi\int_0^4(2x+2)\cdot 2\sqrt{4x-x^2}\,dx$$
$$=4\pi\int_0^4(x+1)1\sqrt{4-(2-x)^2}\,dx$$

ここで，$2-x=2\sin\theta$ とおくと，

$$-dx=2\cos\theta\,d\theta$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\to$ | $4$ |
| $\theta$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\to$ | $-\frac{\pi}{2}$ |

であるから，

$$V=4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(3-2\sin\theta)\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot(-2\cos\theta)\,d\theta$$
$$=4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-2\sin\theta)\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-2\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta-2\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta$$
$$=16\pi\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=16\pi\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\boldsymbol{24\pi^2}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

**解説**

(1) では，曲線の概形がわからず立式に戸惑うかもしれませんが，与えられた方程式は楕円を回転させたものなので，$y$ について解いてしまえば立式することができます．積分計算では，半円の面積を利用しましたが，(3) の計算で行っているように，$2-x=2\sin\theta$ という置換を行っても計算できます．

(3) は，置換積分を利用しましょう．根号内を $\sqrt{4-(2-x^2)^2}$ という形に平方完成することがポイントです．基本的な積分計算なので必ずできるようにしておきましょう．また，三角関数の積分計算では，以下の公式を用いています．証明は，右辺を微分すれば容易にできます．

**公 式**　**【三角関数の積分公式】**

$$\int\sin\theta\cos^n\theta\,d\theta=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\theta+C$$
$$\int\cos\theta\sin^n\theta\,d\theta=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\theta+C$$

（$C$ は積分定数）

袋の中に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 8 枚のカードが入っている．袋の中からカードを 1 枚取り出して，もとに戻すという操作を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に取り出されたカードに書かれた数をそれぞれ $a, b, c, d$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $a+b+c+d=6$ となる確率を求めよ．

（2） 積 $abcd$ が奇数となる確率を求めよ．

（3） $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ となる確率を求めよ．

（4） $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{2}{cd}=\dfrac{1}{2}$ となる確率を求めよ．

袋の中に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 8 枚のカードが入っている．袋の中からカードを 1 枚取り出して，もとに戻すという操作を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に取り出されたカードに書かれた数をそれぞれ $a, b, c, d$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b+c+d=6$ となる確率を求めよ．

(2) 積 $abcd$ が奇数となる確率を求めよ．

(3) $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ となる確率を求めよ．

(4) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{2}{cd}=\dfrac{1}{2}$ となる確率を求めよ．

**【テーマ】：確率の基本性質**

方針

(1) は，和が 6 となる組合せを考えます．(2) は 4 つの数がすべて奇数であればよく，(3) は，余事象を考えます．(4) は整数問題で，$ab=m,\ cd=n$ とおいて考えます．

♣ ♠

**解答**

(1) 1 回の試行によるカードの取り出し方の総数は 8 通りである．

$a+b+c+d=6$ となる 4 つの数の組合せは，

$$\{1, 1, 1, 3\},\quad \{1, 1, 2, 2\}$$

である．これら 4 つの数を $a, b, c, d$ に対応させればよいので，

$\{1, 1, 1, 3\}$ については 4 通り，$\{1, 1, 2, 2\}$ については ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通り

ある．ゆえに，求める確率は，

$$\mathbf{\frac{4+6}{8^4}=\frac{5}{2048}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) 4 つの数の積が奇数となるのは，4 つの数がすべて奇数のときだけであるから，求める確率は，

$$\left(\frac{4}{8}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{16}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ は $a, b, c, d$ の少なくとも 1 つが 1 であることと同値であるから，1 が 1 回も出ない確率を考える．その確率は，$\left(\dfrac{7}{8}\right)^4$ であるから，余事象の確率より，求める確率は，

$$1-\left(\frac{7}{8}\right)^4=\mathbf{\frac{1695}{4096}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(4) $ab=m,\ cd=n$ とすると，与えられた方程式は，

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\iff mn-2n-4m=0\iff (m-2)(n-4)=8$$

$m-2\geqq -1,\ n-4\geqq -3$ より，かけて 8 となる整数の組合せは，

$$(m-2, n-4)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

$$(m, n)=(3, 12), (4, 8), (6, 6), (10, 5)$$

の 4 通りがある．ゆえに，$m=ab, n=cd$ として，$a, b, c, d$ の組合せの数を調べる．

(i) $(ad, cd)=(3, 12)$ のとき，

$(a, b)=(1, 3), (3, 1)$

$(c, d)=(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$

より，$2\times4=8$ 通り．

(ii) $(ad, cd)=(4, 8)$ のとき，

$(a, b)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$

$(c, d)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$

より，$3\times4=12$ 通り．

(iii) $(ad, cd)=(6, 6)$ のとき，

$(a, b)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

$(c, d)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

より，$4\times4=16$ 通り．

(iv) $(ad, cd)=(10, 5)$ のとき，

$(a, b)=(2, 5), (5, 2)$

$(c, d)=(1, 5), (5, 1)$

より，$2\times2=4$ 通り．

以上より，求める確率は，

$$\frac{8+12+16+4}{8^4}=\frac{40}{8^4}=\boldsymbol{\frac{5}{512}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

**解説**

確率の基本的な計算問題です．(3) は，$xy=0$ ならば $x=0$ または $y=0$ であることを応用した問題です．ただし，ここで勘違いをしてはいけないのは数学で用いる『または』は集合では和集合のことを表しているので，『かつ』も含んでいます．したがって，$x=0$ または $y=0$ は $x=y=0$ も含んでいます．すなわち $x, y$ がともに 0 にならないときが余事象になります．ちなみに $x, y$ がともに 0 にならないことと $xy\neq0$ は同値です．

(4) は，$ab=m, cd=n$ などとおけば見慣れた不定方程式が出てくるので，整数問題として解答できます．ただし，$a, b, c, d$ のとり得る値は 1〜8 の整数であることに注意をしましょう．あとは，1 つ 1 つ丁寧に $a, b, c, d$ の組合せを計算すればよいのです．

$f(x)=x^2+4n\cos x+1-4n,\ \ n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots$ として以下の問いに答えよ.

(1) 各 $n$ に対して

$$f(x)=0\ ,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 $x$ がただ 1 つずつあることを示せ.

(2) (1) の条件を満たす $x$ を $x_n$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ であることを示せ.

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} n{x_n}^2$ を求めよ.

$f(x)=x^2+4n\cos x+1-4n$，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ として以下の問いに答えよ．

(1) 各 $n$ に対して

$$f(x)=0\ ,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 $x$ がただ 1 つずつあることを示せ．

(2) (1) の条件を満たす $x$ を $x_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=0$ であることを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n{x_n}^2$ を求めよ．

**【テーマ】：関数の極限**

方針

$f'(x)=0$, $f''(x)=0$ となる $x$ の値は具体的に表せないので，文字を使います．(2) では，直接 $x_n$ の極限値を求めることが難しいので，$\cos x_n$ の極限値を考えます．

♣ ♠

**解答**

(1) **【証明】**

$f'(x)=2x-4n\sin x$ ，　$f''(x)=2-4n\cos x$ であるから，$f''(x)=0$ のとき，$\cos x=\dfrac{1}{2n}$ である．
これを満たす $x$ を $\alpha_n$ とすると，$\alpha_n$ はただ 1 つ存在する．よって，増減表は次のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha_n$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $0$ | ↘ | 負 | ↗ | 負 |

$$f'(0)=0,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-4n<0$$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)<0$ となるので，この区間で $f(x)$ は単調減少である．

$$\begin{aligned}
f(0)&=1>0\\
f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{\pi^2}{4}+1-4n\\
&\leqq\frac{\pi^2}{4}+1-4=\frac{\pi^2}{4}-3<0
\end{aligned}$$

ゆえに，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)=0$ となる $x$ がただ 1 つ存在することが示された．　**(証明終)**

(2) **【証明】**

${x_n}^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ より，

$$\cos x_n=\frac{4n-1-{x_n}^2}{4n}=1-\frac{{x_n}^2}{4n}-\frac{1}{4n}\ \cdots\cdots ①$$

$0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<{x_n}^2<\dfrac{\pi^2}{4}$ であるから，

$$0<\frac{{x_n}^2}{4n}<\frac{\pi^2}{16n}$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\pi^2}{16n}\to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2}{4n}=0$$

である．① より，

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{{x_n}^2}{4n}-\frac{1}{4n}\right)=1$$

である．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

となり，示された．　　　　**（証明終）**

(3)　${x_n}^2+4n\cos x_n+1-4n=0$ より，

$$4n(1-\cos x_n)={x_n}^2+1$$

$$\frac{4n\sin^2 x_n}{1+\cos x_n}={x_n}^2+1$$

$$\frac{\sin^2 x_n}{1+\cos x_n}=\frac{{x_n}^2+1}{4n}$$

$$\frac{\sin^2 x_n}{{x_n}^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x_n}=\frac{{x_n}^2+1}{4n{x_n}^2}$$

$$n{x_n}^2=\frac{{x_n}^2+1}{4}\left(\frac{x_n}{\sin x_n}\right)^2(1+\cos x_n)$$

(2) より，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n{x_n}^2&=\frac{{x_n}^2+1}{4}\left(\frac{x_n}{\sin x_n}\right)^2(1+\cos x_n)\\&=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 2\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

である．

◇　　　♡

解説

(1) は，$f'(x)$, $f''(x)$ から $f(x)$, $f'(x)$ の増減を調べますが，$f'(x)=0$ となる $x$ の値がそれぞれ具体的に求めることができません．しかし，本問では存在することが重要なのであって，値そのものは必要ないので，文字で代用するだけで十分です．

(2) は，$x_n$ の極限値を求めますが，直接求めることは難しいので，三角関数の極限を利用します．このような，三角関数などを用いて間接的に極限値を求める問題は式変形が難しいので多くの経験が必要になります．

(3) は，式変形が難しい問題です．(2) の結果と与えられた条件から $f(x_n)=0$ であることを用いて式変形を考えます．

点 O を原点とする座標平面上の点 P に対し，点 P から直線 $y=1$ に垂線 PQ を引く．

（1） 1 より大きい実数 $m$ に対して，点 P が半直線 $\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ y=m\}$ 上を動くとき，$\angle$POQ は P$(\sqrt{m},\ m)$ で最大となることを示せ．

（2） (1) の最大値が $\dfrac{\pi}{3}$ 以上となる $m$ の範囲を求めよ．

点 O を原点とする座標平面上の点 P に対し，点 P から直線 $y=1$ に垂線 PQ を引く．

(1)　1 より大きい実数 $m$ に対して，点 P が半直線 $\{(x,\ y)\mid x>0,\ \ y=m\}$ 上を動くとき，$\angle$POQ は $\mathrm{P}(\sqrt{m},\ m)$ で最大となることを示せ．

(2)　(1) の最大値が $\dfrac{\pi}{3}$ 以上となる $m$ の範囲を求めよ．

**【テーマ】：三角関数の図形への応用**

方針

傾きに着目して，tan の加法定理を用います．最大値は，相加平均・相乗平均の関係を利用する方法と判別式を用いる方法があります．

♣ ♠

**解答**

(1) **【証明】**

$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とする．$\mathrm{P}(p,\ m)$, $\mathrm{Q}(p,\ 1)$ $(p>0)$ とおき，OP, OQ と $x$ 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\tan\alpha=\frac{m}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{p}$$

であり，$\theta=\alpha-\beta$ であるから，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\alpha-\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\dfrac{m}{p}-\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{m}{p}\cdot\dfrac{1}{p}}\\&=\frac{p(m-1)}{p^2+m}\ \cdots\cdots\ (*)\\&=\frac{m-1}{p+\dfrac{m}{p}}\end{aligned}$$

ここで，$p>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$\frac{m-1}{p+\dfrac{m}{p}}\leqq\frac{m-1}{2\sqrt{p\cdot\dfrac{m}{p}}}=\frac{m-1}{2\sqrt{m}}$$

等号は，$p=\dfrac{m}{p}$ すなわち $p=\sqrt{m}$ のとき成り立つので，このとき，$\tan\theta$ は最大となる．ゆえに，$\angle$POQ は $\mathrm{P}(\sqrt{m},\ m)$ で最大となることが示された．　**(証明終)**

(2)　$\theta\geqq\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\tan\theta\geqq\tan\frac{\pi}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad\tan\theta\geqq\sqrt{3}$$

(1) より，$\tan\theta\leqq\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}$ であるから，

$$\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\geqq\sqrt{3}\quad\Longleftrightarrow\quad m-1\geqq2\sqrt{3m}$$

両辺正であるから，両辺を 2 乗してこれを整理すると，

$$m^2-14m+1\geqq0$$

$$\therefore \quad m \leqq 7-4\sqrt{3}, \quad 7+4\sqrt{3} \leqq m$$

$m>1$ より，$\boldsymbol{m \geqq 7+4\sqrt{3}}$……**(答)**

◇ ♡

解説

2 直線の傾きが分かり，そのなす角を考えるので，$\tan\theta$ を用います．ここでは，相加平均・相乗平均を用いて最大値を求めましたが，相加平均・相乗平均の関係を思いつかなかったり，使えない場合は以下の解法で求めることができます．こちらも最大値・最小値を求める方法としては重要な手法なので，特に文系の人は分数式の最大値・最小値を求める 1 つの方法としてマスターしておきましょう．

別解

(1) の (*) 以下の解法です．

ここで，$\tan\theta=k$ とおくと，$k$ が最大となるときの $p$ を求めればよい．

$$\frac{p(m-1)}{p^2+m}=k \iff p(m-1)=k(p^2+m) \iff kp^2-(m-1)p+mk=0 \cdots\cdots ①$$

$k \neq 0$ より，判別式を $D$ とすると，$p$ は実数であるから

$$D=(m-1)^2-4mk^2 \geqq 0 \iff k^2 \leqq \frac{(m-1)^2}{4m}$$

$k>0$, $m>1$ より，

$$k \leqq \frac{m-1}{2\sqrt{m}}$$

よって，$k$ の最大値は，$\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}$ となり，このとき，① の重解は，

$$p=\frac{m-1}{2k}=\frac{m-1}{2\cdot\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}}=\sqrt{m}$$

である．ゆえに，$p=\sqrt{m}$ のとき，$k$ は最大となるので，$\tan\theta$ すなわち $\angle\mathrm{POQ}$ は最大となる．

別解で，① の重解を求めていますが，次のことを用いています．

参考

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の重解は，$x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

これは，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解が，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \quad (D \text{ は判別式})$$

で与えられ，重解は $D=0$ のときであることから導かれる．

関数 $y=x-ae^x$ の表す曲線を $C$ とする．ただし，$a$ は $0<a<\dfrac{1}{e}$ を満たす実数，$e$ は自然対数の底で $e=2.718\cdots\cdots$ である．

（1） 原点 O から曲線 $C$ へ引いた接線の接点 A の $x$ 座標を求めよ．

（2） 方程式 $x=ae^x$ は $0<x<1$ の範囲では，ただ 1 つの解をもつことを証明せよ．

（3） $x$ 軸と曲線 $C$ との交点で，$x$ 座標が $0<x<1$ を満たす点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする．このとき，曲線 $C$ の弧 AB と線分 OA, OB で囲まれる部分の面積 $S$ を $a$ と $b$ を用いて表せ．

（4） $a$ が，$0<a<\dfrac{1}{e}$ を満たすすべての実数を動くとき，面積 $S$ を最大にする $a$ の値を求めよ．

関数 $y = x - ae^x$ の表す曲線を $C$ とする．ただし，$a$ は $0 < a < \dfrac{1}{e}$ を満たす実数，$e$ は自然対数の底で $e = 2.718\cdots\cdots$ である．

(1)　原点 O から曲線 $C$ へ引いた接線の接点 A の $x$ 座標を求めよ．

(2)　方程式 $x = ae^x$ は $0 < x < 1$ の範囲では，ただ 1 つの解をもつことを証明せよ．

(3)　$x$ 軸と曲線 $C$ との交点で，$x$ 座標が $0 < x < 1$ を満たす点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする．このとき，曲線 $C$ の弧 AB と線分 OA, OB で囲まれる部分の面積 $S$ を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(4)　$a$ が，$0 < a < \dfrac{1}{e}$ を満たすすべての実数を動くとき，面積 $S$ を最大にする $a$ の値を求めよ．

**【テーマ】：微積分の融合**

方針

(2) はグラフの単調性と中間値の定理を用いて示します．(4) は，$a,\ b$ の 2 変数があるので，条件式を用いて $a$ を消去し，$S$ を $b$ の関数として考えます．

♣　♠

**解答**

(1)　$y' = 1 - ae^x$ より，$C$ 上の点 $(t,\ t - ae^t)$ における接線の方程式は，

$$y = (1 - ae^t)(x - t) + t - ae^t \iff y = (1 - ae^t)x + (at - a)e^t$$

これが原点を通るとき，

$$0 = (at - a)e^t \iff (t - 1)ae^t = 0$$

$ae^t \neq 0$ より，$t = 1$ であるから，接点 A の $x$ 座標は，**1**……(**答**)

(2)　**【証明】**

$y' = 1 - ae^x$ で，$0 < a < \dfrac{1}{e}$，$0 < x < 1$ より，

$$0 < ae^x < \frac{1}{e} < 1$$

であるから，$y' > 0$ となり，$y = x - ae^x$ のグラフは単調増加である．$y = f(x)$ として，

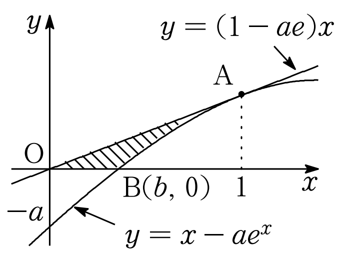
$$f(0) = -a < 0\ ,\quad f(1) = 1 - ae > 0$$

で，$f(x)$ は連続であるから，中間値の定理より，$f(x) = 0$ すなわち $x = ae^x$ は $0 < x < 1$ の範囲にただ 1 つの解をもつ．ゆえに，示された．

**(証明終)**

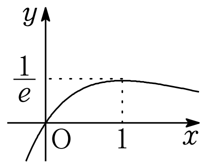
(3)　求める面積は，右図斜線部分であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1 - ae) - \int_b^1 (x - ae^x)\,dx \\ &= \frac{1 - ae}{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 - ae^x\right]_b^1 \\ &= \frac{1 - ae}{2} - \left(\frac{1}{2} - ae - \frac{1}{2}b^2 + ae^b\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}ae + \frac{1}{2}b^2 - ae^b}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



(4)　$b=ae^b$ を満たすので，$a=be^{-b}$ であることから，(3) より，

$$S=\frac{1}{2}ebe^{-b}-b+\frac{1}{2}b^2$$




である．ここで，$y=xe^{-x}$ のグラフは右図のようになるので，$0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき，(3) より，$0<b<1$ である．

よって，$S=g(b)$ とおくと，$0<b<1$ で $g(b)$ が最大となる $b$ の値を求めればよい．

$$g(b)=\frac{1}{2}be^{-b+1}-b+\frac{1}{2}b^2$$

$$\begin{aligned} g'(b)&=\frac{1}{2}(1-b)e^{-b+1}-1+b \\ &=(b-1)\left(1-\frac{1}{2}e^{-b+1}\right) \end{aligned}$$

$g'(b)=0$ のとき，$b=1,\ 1-\log 2$ であるから，増減表は次のようになる．

| $b$ | $0$ | $\cdots$ | $1-\log 2$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(b)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g(b)$ | | ↗ | | ↘ | |

よって，$b=1-\log 2$ のとき，$g(b)$ は最大となるので，$S$ は最大である．このとき，

$$\begin{aligned} a&=be^{-b} \\ &=(1-\log 2)e^{-(1-\log 2)} \\ &=(1-\log 2)e^{\log\frac{2}{e}} \\ &=\boldsymbol{\frac{2(1-\log 2)}{e}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

である．

◇　♡

解説

(2) は，$y=x-ae^x$ が単調増加であることを示し，連続であることから中間値の定理を利用します．(4) は，(3) で求めた $S$ を利用しますが，$a,\ b$ の 2 変数関数になるので，$b=ae^b$ を用いて $a$ を消去し，$b$ の関数とみて最大値を求めます．

曲線 $C: y=\sqrt{5-x}$ 上の点を $\mathrm{P}(a, b)$ とする．ただし，$0 \leqq a < 5$ とする．

（1） 点 P における曲線 $C$ の接線の方程式を求めよ．

（2） （1）で得られた接線，曲線 $C$ ，$x$ 軸および $y$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V$ とする．このとき，$V$ を $a$ の関数で表せ．

（3） （2）で得られた体積 $V$ の最小値を求めよ．

曲線 $C : y = \sqrt{5-x}$ 上の点を $\mathrm{P}(a, b)$ とする．ただし，$0 \leqq a < 5$ とする．

(1) 点 P における曲線 $C$ の接線の方程式を求めよ．

(2) (1) で得られた接線，曲線 $C$，$x$ 軸および $y$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V$ とする．このとき，$V$ を $a$ の関数で表せ．

(3) (2) で得られた体積 $V$ の最小値を求めよ．

**【テーマ】：微分法の応用**

方針

(2) は，円錐の体積から曲線をまわして得られる体積を引きます．

♣ ♠

**解答**

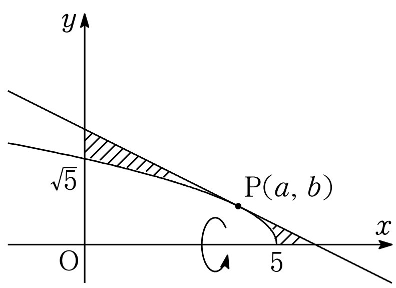
(1) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}$ より，$\mathrm{P}(a, b)$ における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2\sqrt{5-a}}(x-a)+b \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5-a}}x + \frac{a}{2\sqrt{5-a}} + \sqrt{5-a} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{5-a}}x + \frac{10-a}{2\sqrt{5-a}}} \cdots\cdots(\textbf{答}) \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．

(2) ① と $x$ 軸の交点は，$(10-a, 0)$ であり，① と $y$ 軸の交点は，$\left(0, \dfrac{10-a}{2\sqrt{5-a}}\right)$ である．よって，

$$\begin{aligned} V &= \pi\left(\frac{10-a}{2\sqrt{5-a}}\right)^2 \times (10-a) \times \frac{1}{3} - \int_0^5 \pi y^2\,dx \\ &= \frac{(10-a)^3}{12(5-a)}\pi - \pi\int_0^5 (5-x)\,dx \\ &= \frac{(10-a)^3}{12(5-a)}\pi - \pi\left[5x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^5 \\ &= \left\{\frac{(10-a)^3}{12(5-a)} - \left(25 - \frac{25}{2}\right)\right\}\pi \\ &= \boldsymbol{\left\{\frac{(10-a)^3}{12(5-a)} - \frac{25}{2}\right\}\pi} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$




(3) (2) の $V$ を $a$ の関数と考えて $V = V(a)$ とおくと，

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{3(10-a)^2 \cdot (-1) \cdot (5-a) - (10-a)^3 \cdot (-1)}{(5-a)^2} \\ &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{(10-a)^2(2a-5)}{(5-a)^2} \end{aligned}$$

$V'(a) = 0$ のとき，$a = \dfrac{5}{2}$ ($\because$ $0 \leqq a < 5$) より，増減表は次のようになる．

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{5}{2}$ | $\cdots$ | $(5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $V(a)$ | | ↘ | | ↗ | |

ゆえに，$a=\dfrac{5}{2}$ のとき，$V$ は最小値

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{5}{2}\right) &= \left\{\frac{\left(10-\frac{5}{2}\right)^3}{12\cdot\frac{5}{2}}-\frac{25}{2}\right\}\pi \\
&= \left(\frac{15^3}{6\cdot5\cdot8}-\frac{25}{2}\right)\pi \\
&= \left(\frac{3^2\cdot5^2}{2^4}-\frac{5^2}{2}\right)\pi \\
&= \frac{5^2(3^2-2^3)}{2^4}\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{25}{16}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

をとる．

◇　　♡

解説

(1) は，接線の公式を利用するだけですが，点 P が曲線 $C$ 上にあるので，$b=\sqrt{5-a}$ を用いて $b$ を消去しておきます．理由は，(2), (3) の設問を見たとき，体積 $V$ を $a$ の関数として考えているためです．

(2) は，直線と曲線 $C$ で囲まれた部分を $x$ 軸のまわりに回転させたときの回転体の体積を求めますが，直線を回転させると円錐ができるので，円錐は公式を用いて計算すれば積分計算をする必要はありません．そこから，不要な部分を除けばよいのです．

(3) は，(2) で求めた体積 $V$ を $a$ の関数とみて積分します．微分の計算を慎重にやれば基本的な計算問題なので完答できるでしょう．

すべての実数 $x$ について，不等式

$$-1 \leqq 2a\sin x - \cos 2x + b \leqq 3$$

が成り立つとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

すべての実数 $x$ について，不等式

$$-1 \leqq 2a\sin x - \cos 2x + b \leqq 3$$

が成り立つとき，点 $(a, b)$ の存在範囲を図示せよ．

**【テーマ】：条件を満たす点の存在範囲**

方針

$t = \sin x$ として，2 次不等式に変形して考えます．

♣ ♠

**解答**

$2a\sin x - \cos 2x + b = 2\sin^2 x + 2a\sin x + b - 1$ であるから，$t = \sin x$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$2\sin^2 x + 2a\sin x + b - 1 = 2t^2 + 2at + b - 1$$

となる．ゆえに，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に

$$-1 \leqq 2t^2 + 2at + b - 1 \leqq 3$$

が成り立つための点 $(a, b)$ の存在範囲を求めればよい．

$$f(t) = 2t^2 + 2at + b - 1$$

とおくと，

$$f(t) = 2\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + b - 1$$

(i) $-\dfrac{a}{2} < -1$ すなわち $a > 2$ のとき，

$$f(-1) \geqq -1 \text{ かつ } f(1) \leqq 3 \iff 2 - 2a + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } 2 + 2a + b - 1 \leqq 3$$

$$\therefore\ b \geqq 2a - 2 \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

これを満たす $(a, b)$ は存在しない．

(ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} < 0$ すなわち $0 < a \leqq 2$ のとき，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) \geqq -1 \text{ かつ } f(1) \leqq 3 \iff -\frac{a^2}{2} + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

$$\therefore\ b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

(iii) $0 \leqq -\dfrac{a}{2} < 1$ すなわち $-2 < a \leqq 0$ のとき，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) \geqq -1 \text{ かつ } f(-1) \leqq 3 \iff b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } 2 - 2a + b - 1 \leqq 3$$

$$\therefore\ b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

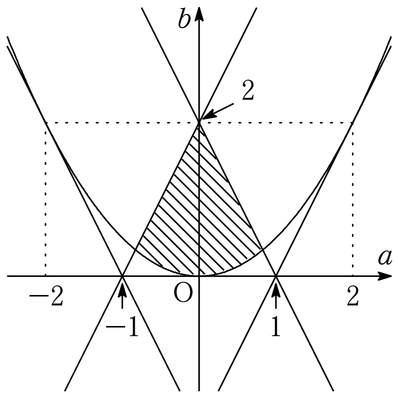
(iv) $1 \leqq -\dfrac{a}{2}$ すなわち $a \leqq -2$ のとき，

$$f(1) \geqq -1 \text{ かつ } f(-1) \leqq 3 \iff 2 + 2a + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

$$\therefore\ b \geqq -2a - 2 \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

これを満たす $(a, b)$ は存在しない．

したがって，(i) ～ (iv) より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，下図斜線部分で，境界線上の点を含む．




◇ ♡

解説

三角不等式が常に成り立つための点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求める問題ですが，実質は 2 次関数の解の配置問題です．$t=\sin x$ とおいて，$t$ の 2 次不等式にしますが，置き換えた後の文字 $t$ のとり得る値の範囲を求めることを忘れないようにしましょう．また，$t$ の 2 次関数では，軸に文字を含んでいるので場合分けが必要になる点に注意しましょう．

(1)　$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $f(x)=xe^{-x}$ を $k$ 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような $x$ の値を $a_k$ とする．$a_k$ を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ である．

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ．

(4)　$y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ．

（1） $a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ.

（2） 関数 $f(x)=xe^{-x}$ を $k$ 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような $x$ の値を $a_k$ とする. $a_k$ を求めよ．ただし，$k=1,\,2,\,\cdots\cdots$ である.

（3） $S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ.

（4） $y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ.

**【テーマ】：微積分の融合**

**方針**

(1) では，$h>0$ として，$a=1+h$ とおき，二項定理を活用します.（2) は，第 $k$ 次導関数を類推しそれが正しいことを数学的帰納法で示します.（3) は，$S(x)$ を計算し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S(a_k)$ を求めてから極限をとります.（4) は，元の関数のグラフと逆関数のグラフは $y=x$ に関して対称であることを利用します.

♣ ♠

**解答**

（1） **【証明】**

$a>1$ のとき，$h>0$ として，$a=1+h$ とおくと，

$$a^n=(1+h)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots\cdots+h^n>{}_n\mathrm{C}_2h^2$$

したがって，

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{{}_n\mathrm{C}_2h^2}=\frac{2n}{n(n-1)h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

が成り立つ．ゆえに，示された.　　（証明終）

（2） $f(x)=xe^{-x}$ より，

$$f'(x)=-(x-1)e^{-x},\quad f''(x)=(x-2)e^{-x}$$

となるので，$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ と推定できる.

$k=1$ のときは成り立つので，ある $k$ での成立を仮定して，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^ke^{-x}+(-1)^{k+1}(x-k)e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}(x-k-1)e^{-x}\end{aligned}$$

より，$k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法によりすべての自然数 $k$ に対して，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$$

が成り立つ．$f^{(k)}(x)=0$ を満たす $x$ の値は，$e^{-x}\neq0$ であることから，$x=k$ である.

$\therefore$ $\boldsymbol{a_k=k}$……(答)

（3） $S(x)=\displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt=\Big[-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^x=-(x+1)e^{-x}+1$ …… ①

(2) より，$S(a_k)=S(k)=-(k+1)e^{-k}+1$ であるから，

$$n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)=n+\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}-n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$$

$T_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$ とおくと，

$$T_n = 2e^{-1} + 3e^{-2} + \cdots\cdots + (n+1)e^{-n}$$
$$e^{-1}T_n = \quad 2e^{-2} + \cdots\cdots + ne^{-n} + (n+1)e^{-n-1}$$

辺々引くと，

$$(1-e^{-1})T_n = 2e^{-1}+e^{-2}+\cdots\cdots+e^{-n}-(n+1)e^{-n-1} \iff \frac{e-1}{e}T_n = \frac{1}{e} + \frac{\frac{1}{e}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{e}} - \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$T_n = \frac{1}{e-1} + \frac{e\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{(e-1)^2} - \frac{e}{e-1}\cdot\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

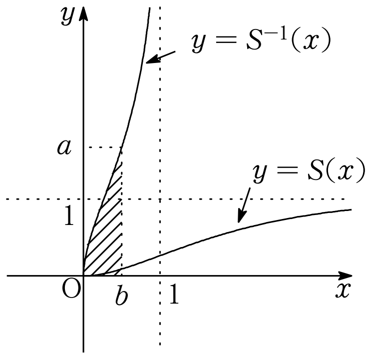
したがって，(1) の結果を用いて，

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{e-1} + \frac{e}{(e-1)^2} = \boldsymbol{\frac{2e-1}{(e-1)^2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　① より，

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}+1\right) = 1$$

よって，$y = S(x)$ と $y = S^{-1}(x)$ のグラフは右図のようになる．




$S^{-1}(b) = a$ とすると，$b = S(a) = 1 - \frac{a+1}{e^a}$ であり，

$b \to 1-0$ のとき，$a \to \infty$ である．よって，

$$\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy = \lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(x)\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left\{ab - \int_0^a S(x)\,dx\right\}$$ ☞ 解説

$$\int_0^a S(x)\,dx = \int_0^a \{1-(x+1)e^{-x}\}\,dx$$
$$= \Big[\,x + (x+1)e^{-x}\Big]_0^a - \int_0^a e^{-x}\,dx$$
$$= a + (a+1)e^{-a} - 1 + e^{-a} - 1$$
$$= (a+2)e^{-a} + a - 2$$

$$(\text{与式}) = \lim_{b\to1-0}\{ab - (a+2)e^{-a} - (a-2)\}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(2 - \frac{a+2}{e^a}\right)$$
$$= \mathbf{2}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　　　　♡

**解説**

(1) は，一度は経験しておきたい証明です．1 より大きい実数 $a$ を $h>0$ として $1+h$ の形にすることで二項定理が使えるようになります．この他にも実数 $x$ を整数 $n$ と $0<\alpha<1$ を満たす実数 $\alpha$ を用いて $x = n+\alpha$ のように表す問題もあります．

(2) は，第 $k$ 次導関数を類推しそれを数学的帰納法で証明する問題です．類推が明らかな場合を除いて証明をつけるようにしておきましょう．

(3) は，計算問題です．定積分・和・極限を丁寧に計算するだけです．

(4) は，逆関数の定積分が出てくるので，経験したことがない人は途方に暮れたかもしれませんが，逆関数は元の関数を $y = x$ に関して対称なので，それを利用すればグラフがかけます．グラフがかければ，定積分を面積と捉えることで積分の計算ができます．本問では，$\int_0^b S^{-1}(x)\,dx$ を長方形の面積 $ab$ から $\int_0^a S(x)\,dx$ の面積を除く部分と同じであることを利用しています．

次の問いに答えよ.

(1) 2 個の負でない実数 $a, b$ に対して，$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ.

(2) 負でない実数 $a, b, c$ について，$a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $n$ を 2 以上の整数とする. $n$ 個の負でない実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ と負でない実数 $c$ について，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \geqq c$ ならば,

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ.

次の問いに答えよ．

（1） 2 個の負でない実数 $a, b$ に対して，$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ．

（2） 負でない実数 $a, b, c$ について，$a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

（3） $n$ を 2 以上の整数とする．$n$ 個の負でない実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ と負でない実数 $c$ について，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \geqq c$ ならば，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

**【テーマ】：不等式の証明**

**方針**

(1) 不等式を用いた通分を行うとすっきりと示せます．(1), (2) の流れを一般化して (3) を示します．

♣ ♠

**解答**

（1） **【証明】**

$a \geqq 0, b \geqq 0$ であるから，

$$\frac{a}{1+a} \geqq \frac{a}{1+a+b}\ ,\quad \frac{b}{1+b} \geqq \frac{b}{1+a+b}$$

辺々加えて，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b}$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

$a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ および $a+b \geqq c$ より，

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1+a+b}-\frac{c}{1+c} &= \frac{a+b+(a+b)c-c(1+a+b)}{(1+a+b)(1+c)}\\ &= \frac{a+b-c}{(1+a+b)(1+c)} \geqq 0\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c}\ \cdots\cdots ①$$

これと (1) の結果より，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つので，示された． **（証明終）**

(3) **【証明】**

$i=1,\,2,\,\cdots\cdots,\,n$ とする．このとき，各 $i$ に対して，$a_i \geqq 0$ であるから，

$$\frac{a_i}{1+a_i} \geqq \frac{a_i}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}$$

が成り立つので，$i=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,n$ として辺々加えると，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ここで，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とおくと，$S_n \geqq c$ より，(2) で示した不等式 ① と同様にすれば，

$$\frac{S_n}{1+S_n} \geqq \frac{c}{1+c} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n} \geqq \frac{c}{1+c} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つので，②, ③ より，

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots\cdots\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が示された．　　　　**（証明終）**

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

**解説**

(1) は，大きい方から小さい方を引いても示すことができますが，計算量が多くなります．本問は，分母に正の数を加えて不等式を用いて通分しているので，計算量が少なくすっきりとした証明ができます．

(2) は，大きい方から小さい方を引いて示し，(1) の結果とあわせることで証明ができます．

(3) は，(1), (2) で示したことをヒントに一般化する問題です．(1) でやった証明方法を用いないと難しいでしょう．(2) の結果を用いたいので，$S_n \geqq c$ を述べておくことが必須です．

次の問いに答えよ．

(1)　$p, q, r, s$ を整数とする．このとき $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ が成り立つならば，$p = r$ かつ $q = s$ となることを示せ．ここで $\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい．

(2)　自然数 $n$ に対し，$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 $a_n, b_n$ が存在することを数学的帰納法により示せ．

(3)　$a_n, b_n$ を (2) のものとする．このときすべての自然数 $n$ について $(x, y) = (a_n, b_n)$ は方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ の解であることを数学的帰納法により示せ．

次の問いに答えよ．

（1）　$p, q, r, s$ を整数とする．このとき $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ となることを示せ．ここで $\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい．

（2）　自然数 $n$ に対し，$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 $a_n, b_n$ が存在することを数学的帰納法により示せ．

（3）　$a_n, b_n$ を (2) のものとする．このときすべての自然数 $n$ について $(x, y)=(a_n, b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ．

**【テーマ】：数学的帰納法**

**方針**

(1) は，論証問題で背理法を用いて示す．(2), (3) は，数学的帰納法を用いて示す．

♣　♠

**解答**

（1）**【証明】**

$$p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2} \iff (q-s)\sqrt{2}=r-p$$

$q-s \fallingdotseq 0$ とすると，

$$\sqrt{2}=\frac{r-p}{q-s}$$

となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．よって，$q=s$ である．このとき，$p=r$ となるので，示された．

**（証明終）**

（2）**【証明】**

(i)　$n=1$ のとき，

$a_1=3$，$b_1=2$ とおくと，成立するので，$n=1$ のときは成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき，

$$(3+2\sqrt{2})^k=a_k+b_k\sqrt{2}$$

を満たす整数 $a_k, b_k$ が存在すると仮定する．

$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{k+1}&=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k\\&=(3+2\sqrt{2})(a_k+b_k\sqrt{2})\\&=3a_k+3b_k\sqrt{2}+2a_k\sqrt{2}+4b_k\\&=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}\end{aligned}$$

一方，$(3+2\sqrt{2})^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}$ であり，$a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ はすべて整数であるから，(1) の結果を用いれば，

$$\begin{cases} a_{k+1} = 3a_k + 4b_k \\ b_{k+1} = 2a_k + 3b_k \end{cases}$$

とおくことができるので，$n = k+1$ のときも成り立つ.

以上より，示された.

(3)　すべての自然数について，$a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = 1$ であることを数学的帰納法により示す.

(i)　$n = 1$ のとき，

(2) より，$a_1 = 3,\ b_1 = 2$ であるから，

$$a_1{}^2 - 2b_1{}^2 = 9 - 8 = 1$$

となり，$n = 1$ のとき成り立つ.

(ii)　$n = k$ のとき，

$$a_k{}^2 - 2b_k{}^2 = 1$$

が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{k+1}{}^2 - 2b_{k+1}{}^2 &= (3a_k + 4b_k)^2 - 2(2a_k + 3b_k)^2 \\ &= 9a_k{}^2 + 24a_kb_k + 16b_k{}^2 - 8a_k{}^2 - 24a_kb_k - 18b_k{}^2 \\ &= a_k{}^2 - 2b_k{}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ゆえに，$n = k+1$ のときも成り立つ.

以上より，示された.

◇　♡

**解説**

(1) は，受験生ならば知っておかなければいけない基本事項の証明です．背理法を用いて証明をしますが，ここでは有理数がどんな数なのかを知っていなければいけません．有理数とは，$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ の形に表せる数です．この形に表せない数を無理数と呼んでいます．無理数の代表的なものは，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi$ などがあります．ここでは，$\sqrt{2} = \dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ となったので，(無理数) = (有理数) となり矛盾したことになります.

(2), (3) は，数学的帰納法を用いて証明をする標準的な問題です．特に，(2) は証明の中で漸化式が登場するので，これを利用する問題として (3) でいろいろなものが出題されます．(2) は，多くの類題があるので必ずマスターしておきましょう.

点 $O_1$ を中心として，$\angle XOY$ の 2 辺に接する円 $O_1$ がある．$OO_1 = 1$, $\angle XOY = \alpha$ とする．いま，線分 $OO_1$ と円 $O_1$ の交点を $O_2$ とし，$O_2$ を中心として OX, OY に接する円 $O_2$ をかく．以下同様にして OX, OY に接する円をかくとき，これらの円 $O_1$, $O_2$, …… の面積の総和を求めよ．

点 $O_1$ を中心として，$\angle XOY$ の 2 辺に接する円 $O_1$ がある．$OO_1=1$, $\angle XOY=\alpha$ とする．いま，線分 $OO_1$ と円 $O_1$ の交点を $O_2$ とし，$O_2$ を中心として OX, OY に接する円 $O_2$ をかく．以下同様にして OX, OY に接する円をかくとき，これらの円 $O_1$, $O_2$, …… の面積の総和を求めよ．

**方針**

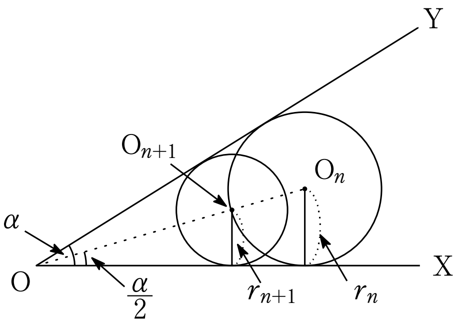
第 $n$ 番目の図形を考えます．相似比を用いて漸化式を立式しましょう．

---

**解答**

円 $O_n$ の半径を $r_n$ とする．このとき，$\angle O_nOX=\dfrac{\alpha}{2}$ であるから，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_n}{OO_n}\iff OO_n=\frac{r_n}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$




一方，$OO_{n+1}=OO_n-r_n$ より，

$$\frac{r_{n+1}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{r_n}{\sin\frac{\alpha}{2}}-r_n$$

$$r_{n+1}=\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)r_n$$

よって，

$$r_n=r_1\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}\quad\left(\because\quad r_1=\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

ゆえに，円 $O_n$ の面積 $S_n$ は，

$$S_n=\pi r_n{}^2=\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-1)}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\frac{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1-\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\&=\frac{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi\sin\frac{\alpha}{2}}{2-\sin\frac{\alpha}{2}}}\cdots\cdots(\quad)\end{aligned}$$

---

**解説**

ある規則にしたがって図形を作っていく問題は，等比数列が表れることが多くあります．その際に，辺の長さや面積を求めるため漸化式を立式します．これは，最初の数個の図形で勝手に等比数列であることを決めると減点の対象となるためです．漸化式を作れば等比数列であることもわかるし，一般項を求めることもできます．このようにして辺の長さや面積を計算します．漸化式を立式するときは，$n$ 番目と $n+1$ 番目の図形を考えて，それらの関係を式で表します．本問は，円の半径を $r_n$ として，数列 $\{r_n\}$ に関する漸化式を求めました．

直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2$ とが囲む面積を $S_1$ とし，この 2 つおよび直線 $x = 1$ とが囲む面積を $S_2$ とするとき，$S_1 + S_2$ が最小となるように $a$ の値を定めよ．また，その最小値はいくらか．ただし，$a < 1$ とする．

直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2$ とが囲む面積を $S_1$ とし，この 2 つおよび直線 $x=1$ とが囲む面積を $S_2$ とするとき，$S_1+S_2$ が最小となるように $a$ の値を定めよ．また，その最小値はいくらか．ただし，$a<1$ とする．

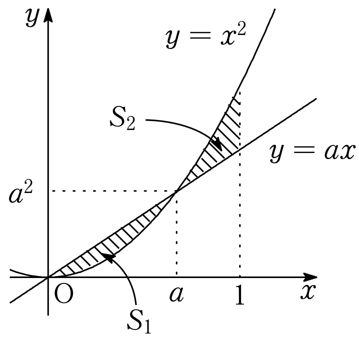
**方針**

$a$ の符号によって直線の傾きが変わるため交点の $x$ 座標の符号が変わります．そのため積分区間が変化するので，場合分けが必要になります．

**解答**

（i） $0 \leqq a < 1$ のとき，

$$S_1+S_2=\int_0^a (ax-x^2)\,dx+\int_a^1 (x^2-ax)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}a^3+\left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\ \right]_a^1$$
$$=\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$




であるから，$f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ とおくと，

$$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

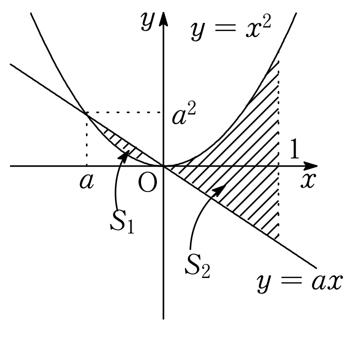
である．よって，$f'(a)=0$ のとき，$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である．したがって，増減表は次のようになる．

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(a)$ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ | ↗ | $\frac{1}{6}$ |

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

（ii） $a<0$ のとき，

$$S_1+S_2=\int_a^0 (ax-x^2)\,dx+\int_0^1 (x^2-ax)\,dx$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\ \right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$$
$$=-\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$




であるから，$g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ とおくと，

$$g'(a)=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}<0$$

である．$g(a)$ のグラフは単調減少なので，

$$g(a) > g(0) = \frac{1}{3}$$

(i), (ii) より，$\dfrac{1}{3} > \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ であるから，求める最小値は，

$$\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{6}} \quad \left(\boldsymbol{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \cdots\cdots (\quad)$$

である．

**解説**

本問は，直線と放物線で囲まれる部分の面積を求めるので，交点の $x$ 座標を求めます．しかし，$a$ の符号で面積を求める式を作る際，積分区間が変わるため場合分けが必要になります．そのことに気付くことが本問での最大のポイントでしょう．面積計算には，直線と放物線で囲まれる部分の面積を求めるので，次の定積分の公式が使えます．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，$a$ がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 $a$ をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．

$S_1+S_2$ の計算の第 1 項目の計算には上記公式を利用しています．複雑な図の面積を求めるときでもこの公式が使えるかどうかを見極められるようになっておくことが大切です．後半は，面積の最小値を求める問題なので，場合分けをして求めた面積で小さい方が最小値になります．

$n$ を 3 以上の自然数とし，関数 $f(x) = \left| \dfrac{x(x-n)}{x^2+1} \right|$ の $x \geqq 0$ における最大値を $a_n$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ．

$n$ を 3 以上の自然数とし，関数 $f(x)=\left|\dfrac{x(x-n)}{x^2+1}\right|$ の $x \geqq 0$ における最大値を $a_n$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

**【テーマ】：最大値・最小値**

**方針**

絶対値の中の関数を $g(x)$ とおいて，$y=g(x)$ のグラフを考えます．最大値を与える $x$ の値は複雑な式になるので文字で代用しましょう．

♣ ♠

**解答**

$g(x)=\dfrac{x(x-n)}{x^2+1}$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{(2x-n)(x^2+1)-x(x-n)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

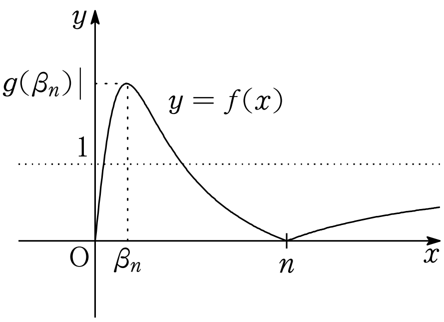
$$=\frac{nx^2+2x-n}{(x^2+1)^2}$$

である．よって，$g'(x)=0$ のとき，$nx^2+2x-n=0$ であるから，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+n^2}}{n}$$

である．ここで，$\alpha_n=\dfrac{-1-\sqrt{1+n^2}}{n}$，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{1+n^2}}{n}$ とおくと，$x\geqq 0$ での増減表は次のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\beta_n$ | $\cdots$ | $(+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $(1)$ |




$$\lim_{x\to\infty}g(x)=1,\ g(\beta_n)=\frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}<0$$

よって，$g(\beta_n)$ と $-1$ との大小関係を比較する．

$$-1-\frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}=\frac{-2{\beta_n}^2+n\beta_n-1}{{\beta_n}^2+1}$$

$0<\beta_n<1$ より，$y=-2x^2+nx-1\ (0<x<1)$ とおくと，グラフは $x$ 軸と 2 点で交わり，

$$x=1 \text{ のとき，} y=n-3\geqq 0$$

であるから，

$$-1\geqq\frac{{\beta_n}^2-n\beta_n}{{\beta_n}^2+1}$$

したがって，$y=f(x)$ は $x=\beta_n$ で最大値 $|g(\beta_n)|$ をとる．ゆえに，

$$a_n=\frac{n\beta_n-{\beta_n}^2}{{\beta_n}^2+1}=\frac{n\cdot\dfrac{-1+\sqrt{1+n^2}}{n}-\dfrac{2+n^2-2\sqrt{1+n^2}}{n^2}}{\dfrac{2+n^2-2\sqrt{1+n^2}}{n^2}+1}$$

$$=\frac{-2-2n^2+(n^2+2)\sqrt{1+n^2}}{2+2n^2-2\sqrt{1+n^2}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-2n^2+(n^2+2)\sqrt{1+n^2}}{2n+2n^3-2n\sqrt{1+n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{2}{n}+\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+1}}{\dfrac{2}{n^2}+2-\dfrac{2}{n}\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

絶対値を含む関数のグラフをかくためには，絶対値をはずす必要がありますが，本問のように，$y=\left|f(x)\right|$ の形をしている関数は，$y=f(x)$ のグラフをかいて $x$ 軸よりも下にある部分を $x$ 軸に関して対称移動すればよいので，場合分けの必要はありません．本問では最大値を求めますが，$x\to\infty$ のとき，$g(x)\to 1$ なので，$\left|g(\beta_n)\right|$ と 1 の大小関係を調べなければいけません．解答では，$g(\beta_n)<0$ なので，$g(\beta_n)$ と $-1$ の大小関係を調べています．ここが一番面倒な部分かもしれませんが，その議論をせずに勝手に $\left|g(\beta_n)\right|$ が最大値と決め付けると大幅な減点は避けられないでしょう．

$n$ を自然数とし，多項式 $P(x)$ を $P(x) = (x+1)(x+2)^n$ と定める．以下の問に答えよ．

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$(x+2)^n$ を $x^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$P(x)$ を $x^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

$n$ を自然数とし，多項式 $P(x)$ を $P(x)=(x+1)(x+2)^n$ と定める．以下の問に答えよ．

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$(x+2)^n$ を $x^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$P(x)$ を $x^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

**【テーマ】：整式の除法**

方針

(1) は，剰余の定理を用います．(2) は，二項定理を用いれば余りが求められます．(3), (4) は前問の結果を用います．

♣　♠

**解答**

(1)　剰余の定理より，求める余りは，

$$P(1)=\mathbf{2\cdot 3^{\boldsymbol{n}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)　二項定理より，

$$\begin{aligned}(x+2)^n &= {}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2\cdot 2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n2^n\\ &= x^2\left({}_n\mathrm{C}_0x^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-3}\cdot 2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}2^{n-2}\right)+n\cdot 2^{n-1}x+2^n\end{aligned}$$

ゆえに，$(x+2)^n$ を $x^2$ で割った余りは，

$$\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) より，

$$(x+2)^n=x^2Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}x+2^n \cdots\cdots ①$$

とおける．両辺に $x+1$ をかけると，

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)^n &= x^2(x+1)Q_1(x)+(n\cdot 2^{n-1}x+2^n)(x+1)\\ P(x) &= x^2(x+1)Q_1(x)+(n\cdot 2^{n-1}x+2^n)(x+1)\\ &= x^2(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}x^2+(n\cdot 2^{n-1}+2^n)x+2^n\\ &= x^2\left\{(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}\right\}+(n+2)2^{n-1}x+2^n \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，$P(x)$ を $x^2$ で割った余りは，

$$\boldsymbol{(n+2)2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　② において，$Q_2(x)=(x+1)Q_1(x)+n\cdot 2^{n-1}$ とおき，$Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは，剰余の定理より，

$$Q_2(1)=2Q_1(1)+n\cdot 2^{n-1}$$

である．一方，① より，$x=1$ を代入すると，

$$3^n=Q_1(1)+n\cdot 2^{n-1}+2^n \iff Q_1(1)=3^n-(n+2)2^{n-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}Q_2(1)&=2\{3^n-(n+2)2^{n-1}\}+n\cdot 2^{n-1}\\&=2\cdot 3^n-(n+4)2^{n-1}\end{aligned}$$

したがって，

$$Q_2(x)=(x-1)Q_3(x)+2\cdot 3^n-(n+4)2^{n-1}$$

と表せるので，② から，

$$\begin{aligned}P(x)&=x^2\{(x-1)Q_3(x)+2\cdot 3^n-(n+4)2^{n-1}\}+(n+2)2^{n-1}x+2^n\\&=x^2(x-1)Q_3(x)+\{2\cdot 3^n-(n+4)2^{n-1}\}x^2+(n+2)2^{n-1}x+2^n\end{aligned}$$

ゆえに，$P(x)$ を $x^2(x-1)$ で割ったときの余りは，

$$\boldsymbol{\{2\cdot 3^n-(n+4)2^{n-1}\}x^2+(n+2)2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは，剰余の定理が使えます．2 次式以上で割るときは，商と余りを設定して式を作り，$x$ に適当な値を代入して余りを決定します．

(2) では，$(x+2)^n$ を $x^2$ で割った余りを求めるので二項定理を用いましたが，次のように微分を利用しても求めることができます．

**別解**

$(x+2)^n$ を $x^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし，余りを $ax+b$ とすると，

$$(x+2)^n=x^2Q(x)+ax+b \cdots\cdots Ⓐ$$

となるので，$x=0$ を代入して，$2^n=b$ を得る．また，Ⓐ の両辺を $x$ で微分すると，

$$n(x+2)^{n-1}=2xQ(x)+x^2Q'(x)+a$$

であるから，$x=0$ を代入すると，$n\cdot 2^{n-1}=a$ を得る．

ゆえに，求める余りは，$\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}x+2^n}\cdots\cdots$(**答**)

（割る式）＝0 が重解をもつタイプでは，微分が利用できます．理系の人は，数学 Ⅲ で積の微分法を学習するので大丈夫だと思いますが，文系の人や理系でもまだ未学習の人は，次の積の微分の公式を知っておくと便利です．特に，文系の人は数学 Ⅲ だから覚えなくていいだろうという意識をもつのではなく，本問のような問題が出たときに使える公式なので，必ず知っておきましょう．

**【積の微分法】**

$u,\ v,\ w$ は $x$ の関数であるとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$(uv)'=u'v+uv'\ ,\quad (uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

自然数 $n$ に対して $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の範囲で関数 $y = e^{-x}\sin x$ と $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を $S_n$ とおく．次の問いに答えよ．

（1） $S_n$ を求めよ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ．

自然数 $n$ に対して $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の範囲で関数 $y=e^{-x}\sin x$ と $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を $S_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $S_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ．

【テーマ】：面積和と極限

方針

$y=e^{-x}\sin x$ は，正の値と負の値を両方とるので，面積を求めるときは，$y=|e^{-x}\sin x|$ を考える必要があります．置換積分を有効に活用すれば絶対値をはずすことができます．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，求める面積 $S_n$ は，

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-x}\sin x|\,dx$$

ここで，$x-(n-1)\pi=t$ とおくと，$dx=dt$ であるから，

| $x$ | $(n-1)\pi$ | $\to$ | $n\pi$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\to$ | $\pi$ |

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\pi}\left|e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t+(n-1)\pi\}\right|dt\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}\left|e^{-t}\sin t\cos(n-1)\pi\right|dt\\&=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt\end{aligned}$$

$I=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt$ とおくと，

$$\begin{aligned}I&=\Big[-e^{-t}\sin t\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-t}\cos t\,dt\\&=\Big[-e^{-t}\cos t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt\\&=e^{-\pi}+1-I\end{aligned}$$

$$2I=e^{-\pi}+1$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

$$\therefore\quad S_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(e^{-\pi}+1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\pi}+1}{2}(e^{-\pi})^{k-1}=\frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}$$

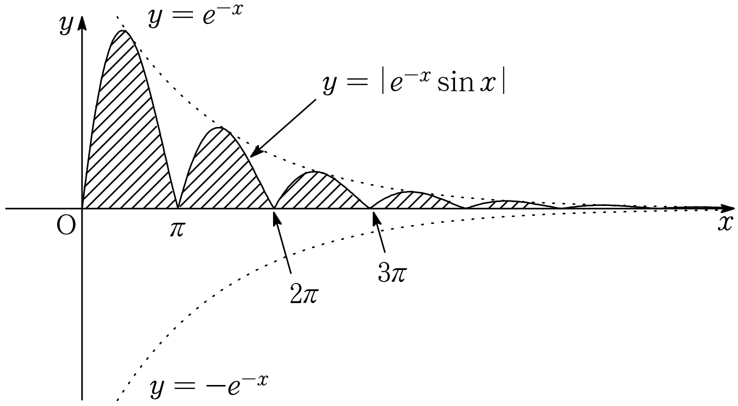
であるから，求める極限値は，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}\\&=\frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})}=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

$y=e^{-x}\sin x$ のグラフは，減衰曲線と呼ばれています．$x \to \infty$ とすれば，振動しながら 0 に収束していくのでそう呼ばれています．この関数は頻出なので，グラフは覚えておきましょう．$y=e^{-x}$ と $y=-e^{-x}$ のグラフに接しながら 0 へ収束していきますが，きちんとした縮尺で図を描くと最初の 2 つくらいの山しか見えずあとは，つぶれてしまいます．したがって，グラフの状況がわかりやすくなるよう縮尺をかえて書かれていることが多いです（下図参照）．




頻出問題でありながら，経験がないと難しい問題でもあります．$S_n$ を求める際には，$|e^{-x}\sin x|$ を積分します．絶対値を忘れないようにしましょう．この絶対値をはずすために，本問では置換積分を利用しています．最初の置換は，区間の平行移動です．$0 \leqq t \leqq \pi$ にすることで $\sin t \geqq 0$ となることを利用すれば絶対値がはずせます．(1) の結果からわかるとおり，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となります．すなわち上図の 1 つ 1 つの山の面積は公比 $e^{-\pi}$ で 0 に収束します．

放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P, Q をもち，P と Q の $x$ 座標の差の絶対値は 1 であるという．ただし $a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を $d$ とする．

（1） $d$ を $a$ を用いて表せ．

（2） $d$ を最大にする $a$ と $b$ の値を求めよ．

放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P, Q をもち，P と Q の $x$ 座標の差の絶対値は 1 であるという．ただし $a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を $d$ とする．

（1） $d$ を $a$ を用いて表せ．

（2） $d$ を最大にする $a$ と $b$ の値を求めよ．

**【テーマ】：放物線と直線**

**方針**

P, Q の $x$ 座標をそれぞれ $p$, $q$ とし，解と係数の関係から $p$, $q$ の関係式を求めます．

♣ ♠

**解答**

（1） 点 P, Q の $x$ 座標をそれぞれ $p$, $q$ $(p<q)$ とすると，題意より，

$$q-p=1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．このとき，$p$, $q$ は

$$ax^2-bx+b=a^2x \iff ax^2-(a^2+b)x+b=0 \cdots\cdots ②$$

の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} p+q=\dfrac{a^2+b}{a} & \cdots\cdots ③ \\ pq=\dfrac{b}{a} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

次に，$y=ax^2-bx+b$ 上の点 $(t,\ at^2-bt+b)$ と $y=a^2x$ の距離を $h$ とすると，

$$h=\frac{\left|at^2-bt+b-a^2t\right|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{\left|a(t-p)(t-q)\right|}{\sqrt{a^4+1}} \quad (\because\ ③, ④)$$

よって，$h$ が最大となるのは，$t=\dfrac{p+q}{2}$ のときで，このとき，

$$\begin{aligned} d&=\frac{\left|a\left(\dfrac{p+q}{2}-p\right)\left(\dfrac{p+q}{2}-q\right)\right|}{\sqrt{a^4+1}} \\ &=\frac{a\left|(q-p)(p-q)\right|}{4\sqrt{a^4+1}} \\ &=\frac{a(q-p)^2}{4\sqrt{a^4+1}} \\ &=\boldsymbol{\frac{a}{4\sqrt{a^4+1}}} \cdots\cdots (\text{答}) \quad (\because\ ①) \end{aligned}$$

（2） (1) より，$d=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$ である．

$a>0$ より，相加平均・相乗平均の関係より，

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$$

等号は，$a^2=\dfrac{1}{a^2}$ すなわち $a^4=1$ であるから，$a>0$ より，$a=1$ のとき成立する．このとき，② より，

$$x^2-(b+1)x+b=0 \iff (x-b)(x-1)=0$$

よって，$x=1,\,b$ である．① より，

$$b-1=1 \text{ または } 1-b=1$$

すなわち，

$$b=2 \text{ または } b=0$$

であるから，$d$ を最大にする $a,\,b$ の値は，

$$(a,\,b)=(1,\,0),\,(1,\,2)$$

で，このとき $d$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ をとる．ゆえに，求める $a,\,b$ の値は，

$$\boldsymbol{(a,\,b)=(1,\,0),\,(1,\,2)}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

まずは，点 P, Q の座標を設定することから始めます．放物線と直線の交点なので，$p,\,q$ は 2 次方程式の 2 解であることがわかるので，解と係数の関係を利用しましょう．あとは，条件から式を作って，$d$ を求めます．$d$ が最大となるのは，放物線上の点における接線が直線 $y=a^2x$ に平行になるときであることを理解しておきましょう．$h$ の式変形ですが，③, ④ を用いて簡単に式変形しているように感じますがこれは，$p,\,q$ が ② の方程式の解であることを考えれば容易に解決します．つまり，$h$ の分子だけを見ると，

$$at^2-bt+b-a^2t=0 \text{ の 2 解が } p,\,q \text{ なので，} at^2-bt+b-a^2t=a(t-p)(t-q)$$

と因数分解できるのです．