$x=5+3i$ とするとき，$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

$x=5+3i$ とするとき，$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

【テーマ】：複素数の計算

方針

まともに代入することはもちろんしません．$x=5+3i$ を解にもつ 2 次方程式を考えます．

♣ ♠

解答

$x=5+3i$ より，$x-5=3i$ であるから，両辺を 2 乗すると

$$(x-5)^2=-9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-10x+34=0 \cdots\cdots ①$$

ここで，$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83$ を $x^2-10x+34$ で割ると，商が $2x^3-1$ で余りが -49 となることから，

$$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83=(x^2-10x+34)(2x^3-1)-49$$

と変形できる．この式において，$x=5+3i$ を代入すると，① から右辺は -49 となる．
したがって，求める値は **-49**$\cdots\cdots$(**答**)

♢ ♡

解説

整式の除法を使う方法と，次数下げを使う方法があります．どちらも大切な解法なので熟知しておきましょう．ただし，本問では次数下げをすると計算量が膨大になるので，整式の除法を用いる方が賢明でしょう．

座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ．$y = 3x^2 - 6x$ で表される放物線を C とする．n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2 - 6n)$ をとる．原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．C と線分 OP で囲まれる図形を D とする．ただし，D は境界を含むとする．$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して，直線 $x = k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） $f(k)$ を求めよ．

（2） D に含まれる格子点の総数を求めよ．

（3） $f(k)$ が最大になるような k を求めよ．

座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ．$y=3x^2-6x$ で表される放物線を C とする．n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$ をとる．原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．C と線分 OP で囲まれる図形を D とする．ただし，D は境界を含むとする．$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(k)$ を求めよ．

(2)　D に含まれる格子点の総数を求めよ．

(3)　$f(k)$ が最大になるような k を求めよ．

【テーマ】：格子点問題

方針

領域を図示して，$x=k$ 上の格子点の個数を求めます．あとは，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として加えれば，領域内の格子点の個数が求められます．

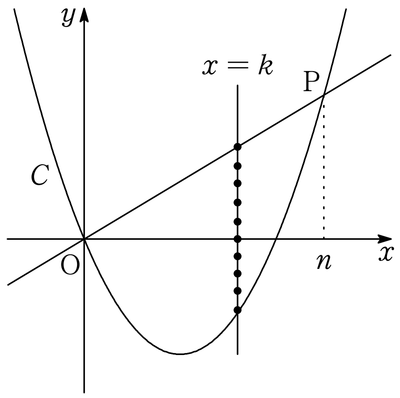
♣　♠

解答

(1)　直線 OP の方程式は，$y=(3n-6)x$ である．直線 $x=k$ と直線 OP および放物線 C との交点の y 座標は，それぞれ

$$(3n-6)k,\quad 3k^2-6k$$

であり，$n,\ k$ がともに整数であることから，これらはともに整数となる．ゆえに，



$$f(k)=(3n-6)k-(3k^2-6k)+1$$
$$=\boldsymbol{-3k^2+3nk+1}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，領域 D に含まれる格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3nk+1)$$
$$=-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{-n(2n+1)+3n^2+2\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(1) より，

$$f(k)=-3\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2+1$$

である．ここで，$n,\ k$ は整数であるから，$f(k)$ が最大となるのは，次の場合に分けられる．

(i)　n が偶数のとき

$k=\dfrac{n}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{3}{4}n^2+1$ をとる．

(ii)　n が奇数のとき

$k=\dfrac{n\pm1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{1}{4}$ をとる．

以上より，$f(k)$ が最大になるような k の値は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \text{ が偶数のとき，} \quad \boldsymbol{k} = \dfrac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{n} \text{ が奇数のとき，} \quad \boldsymbol{k} = \dfrac{\boldsymbol{n} \pm \mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

$\boxed{\text{解説}}$

格子点を求める最も基本的なタイプの問題です．領域内の格子点の個数を求めるときは，まず $x=k$ 上にある格子点の個数を求めて k の値を変えてそれらを加えていきます．問題によっては，$y=k$ 上にある格子点の個数を求めた方が計算が楽になる場合もあります．注意したいのは，$x=k$ と直線 OP および放物線 C との交点の y 座標が整数になっている点です．もしも整数でなければそれを超えない最大の整数を考えなければならなくなります．特に，曲線が $y=\log x$ のようになったときに注意しましょう．

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする．n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す．

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ．

(2)　$\left|X(7)\right|$ の期待値を求めよ．

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ．

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする．n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す．

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ．

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ．

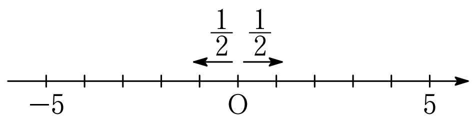
(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ．

【テーマ】：移動の確率

方針

反復試行の確率を利用します．(2) では，$|X(7)|$ のとり得る値をすべて書き出して地道に確率を計算します．

解答



(1)　8 回中 x 回右へ進むとすれば，左へは $8-x$ 回進むので，8 回の移動で 2 の位置にくるためには

$$x+(-1)\cdot(8-x)=2 \qquad \therefore \quad x=5$$

であることから，右へ 5，左へ 3 移動すればよい．よって，求める確率は，

$${}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^8}=\boldsymbol{\frac{7}{32}}\text{……(答)}$$

(2)　$|X(7)|$ のとり得る値は，1, 3, 5, 7 であり，それらの値をとる確率をそれぞれ $P(1)$, $P(3)$, $P(5)$, $P(7)$ とする．$|X(n)|=\pm X(n)$ であることを考慮にいれて，(1) と同様にそれぞれの確率を求めると，

$$P(1)=2\times{}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=2\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{35}{64}$$

$$P(3)=2\times{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=2\cdot\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{21}{64}$$

$$P(5)=2\times{}_7\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6=2\cdot7\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{7}{64}$$

$$P(7)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{64}$$

よって，求める期待値を E とすると，

$$\begin{aligned}E&=1\times\frac{35}{64}+3\times\frac{21}{64}+5\times\frac{7}{64}+7\times\frac{1}{64}\\&=\frac{35+63+35+7}{64}=\boldsymbol{\frac{35}{16}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(3)　右への移動を → ，左への移動を ← で表すことにする．

1 回目の移動が → のときは，

→ → → → → →	→ → → → ← ←
→ → → → → ←	→ → → ← → ←
→ → → → ← →	→ → ← → → ←
→ → → ← → →	→ → → ← ← →
→ → ← → → →	→ → ← → ← →

の 10 通りがあり，1 回目の移動が ← のときも同様に 10 通りがある．ゆえに，求める確率は，

$$20\times\frac{1}{2^6}=\mathbf{\frac{5}{16}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

(1) で方程式を用いて移動を考えた理由は，8 回の移動で 2 の位置にくるための移動は右に 5，左に 3 という移動しかないということを示すためです．

(2) では，絶対値が付いているので，絶対値内が負の場合を考える必要があるので，確率を求める際にそれぞれ 2 倍しています．

(3) では，一度も O に戻ってこないので，計算で求めると間違えてしまう可能性が大きく注意が必要です．最初に右に行ったのなら，もう O には戻ってこられないので，正の領域での移動を考えなければならないし，最初に左に行ったのなら，負の領域で考えなければなりません．移動の確率が右も左も同じなので，正の領域の移動を求めれば，負の領域の移動も同様に考えることができ計算も楽になります．

$0° < \alpha < 90°$ とするとき，次の各問いに答えよ．

（1） $\cos 3\alpha = \sin 2\alpha$ を満たす α の値を求めよ．また，$\sin \alpha$ の値を求めよ．

（2） 半径 1 の円に内接する正五角形 ABCDE において $\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ．

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ とするとき，次の各問いに答えよ．

（1）　$\cos 3\alpha = \sin 2\alpha$ を満たす α の値を求めよ．また，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

（2）　半径 1 の円に内接する正五角形 ABCDE において $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

(1) で α の値を求めるために，まず cos に統一し角度を比較します．$\sin\alpha$ の値を求めるときは，cos の 3 倍角の公式を使って $\sin\alpha$ に関する 2 次方程式を導きます．(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をそれぞれ α を用いて表します．

♣ ♠

解答

（1）　$\sin 2\alpha = \cos(90^\circ - 2\alpha)$ であるから，

$$\cos 3\alpha = \cos(90^\circ - 2\alpha) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$0^\circ < 3\alpha < 270^\circ$，$-90^\circ < 90^\circ - 2\alpha < 90^\circ$ であることから，① が成り立つための条件は，

$$3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$$

である．これを解いて，求める α の値は，$\boldsymbol{\alpha = 18^\circ}$……(**答**)

また，$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$，$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ であることから，与式は

$$-3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

と変形できる．$\cos\alpha \neq 0$ より，

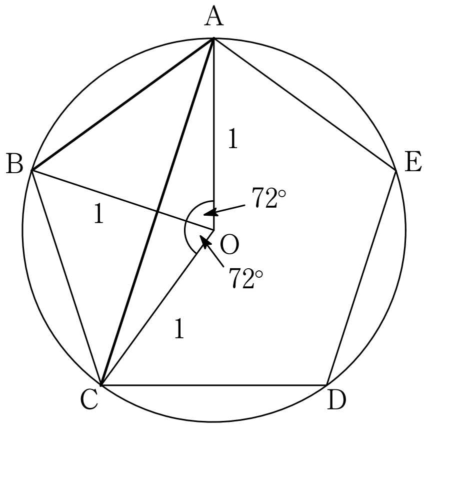
$$-3 + 4\cos^2\alpha = 2\sin\alpha \iff -3 + 4(1 - \sin^2\alpha) = 2\sin\alpha$$

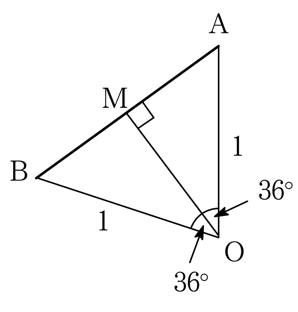
$$\iff 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

より，$\sin\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ を得る．$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから，$\sin\alpha > 0$．よって，

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2）　円の中心を O とする．





AB の中点を M とすると，△OAM において，

$$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin 36^\circ=\overline{\mathrm{OA}}\sin 2\alpha=\sin 2\alpha$$

となる．$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}$ であるから，$\overline{\mathrm{AB}}=2\sin 2\alpha$ となる．

同様に考えて，

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{OA}}\sin 72^\circ=2\cos 18^\circ=2\cos\alpha \qquad (☜\ \ \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta)$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}&=4\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\\&=8\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha\\&=8\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)\end{aligned}$$

となる．② より，$\sin^2\alpha=\dfrac{-2\sin\alpha+1}{4}$ であるから，

$$\begin{aligned}8\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)&=8\sin\alpha\left(1-\frac{-2\sin\alpha+1}{4}\right)\\&=8\sin\alpha\cdot\frac{2\sin\alpha+3}{4}\\&=4\sin^2\alpha+6\sin\alpha\\&=-2\sin\alpha+1+6\sin\alpha \quad (\because\ \ ②)\\&=4\sin\alpha+1\\&=4\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\\&=\sqrt{\mathbf{5}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) の問題は，『$\sin 3\alpha=\sin 2\alpha$ を満たす α を求めよ』という問題が，1992 年に京都大学で出題されている．この種の問題は，(1) で取り扱われ，その後の問題に大きく影響していくので，確実に得点できる力を養っておく必要がある．

(2) は，正五角形を扱う問題で (1) で得られた 18° という角度と正五角形の内部にできる 36°, 72° との関係をしっかりと見定めて (1) の結果を利用する必要がある．ちなみに $\overline{\mathrm{AB}}$ は，線分 AB の長さを表している．解答も問題に合わせて $\overline{\mathrm{AB}}$ 等とかいた．

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ k>0$ とする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

（1）　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right) \geqq (k+1)^2$

（2）　$\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\left(c+\dfrac{k^2}{b}\right)\left(a+\dfrac{k^2}{c}\right) \geqq (k+1)^4$

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ k>0$ とする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

(1) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right)\geqq(k+1)^2$

(2) $\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\left(c+\dfrac{k^2}{b}\right)\left(a+\dfrac{k^2}{c}\right)\geqq(k+1)^4$

【テーマ】：不等式の証明（相加平均・相乗平均の関係）

方針

(1) は左辺を展開して相加平均・相乗平均の関係を用います．(2) は (1) を利用します．どちらも等号成立条件を忘れないようにしましょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{k^2}{a}\right)=ab+k^2+1+\dfrac{k^2}{ab}$ であり，$ab>0,\ k^2>0$ であることから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$ab+\frac{k^2}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{k^2}{ab}}=2k$$

が成り立つ．等号は，$ab=\dfrac{k^2}{ab}$ すなわち，$ab=k$ のとき，成立する．ゆえに，

$$ab+\frac{k^2}{ab}+k^2+1\geqq 2k+k^2+1 \iff \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{k^2}{a}\right)\geqq(k+1)^2$$

が成り立つことから，題意は示された．　**（証明終）**

(2) **【証明】**

(1) より，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\geqq(k+1)^2 \quad\cdots\cdots\quad ①$$

$$\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right)\geqq(k+1)^2 \quad\cdots\cdots\quad ②$$

が成り立つ．①, ② の辺々をかけて，

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{k^2}{b}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{k^2}{c}\right)\geqq(k+1)^4 \cdots\cdots ③$$

を得る．ここで，①, ② の等号成立条件は，(1) から，それぞれ $bc=k,\ ca=k$ すなわち $a=b,\ ac=k$ である．ゆえに，③ の等号が成り立つ $a,\ b,\ c,\ k$ が存在するので，題意は示された．　**（証明終）**

◇ ♡

解説

(1) は，相加平均・相乗平均の関係を用いる基本問題なので，完答を目指しましょう．(2) では，文字を置き換えることで (1) で示した不等式を利用しますが，辺々をかけるときは注意が必要です．③ の等号が成り立つ $a,\ b,\ c,\ k$ が存在するか否かを確かめる必要があります．もしも存在しなければ，③ の式から等号を消さないといけません．そのチェックを怠れば減点される可能性がありますので，十分に注意を払いましょう．

関数 $y=f(x)$ は $x \leqq 0$ で連続で，$x<0$ で第 1 次導関数および第 2 次導関数をもち，次の（ア），（イ）を満たす．

（ア）　$f(-2)=-\dfrac{8}{3}$，　$f'(-2)=2$

（イ）　任意の負数 a に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線が，
曲線 $y=f'(x)$ 上の点 $(a,\ f'(a))$ における接線と直交する．

このとき，次の問いに答えよ．

（1）　$f'(x)$ を求めよ．

（2）　$f(x)$ を求めよ．

（3）　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=f'(x)$ および直線 $x=a$ $(a<0)$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とするとき $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r}$ が有限となるような r の範囲を求めよ．

関数 $y=f(x)$ は $x \leqq 0$ で連続で，$x<0$ で第 1 次導関数および第 2 次導関数をもち，次の（ア），（イ）を満たす.

（ア） $f(-2)=-\dfrac{8}{3}$， $f'(-2)=2$

（イ） 任意の負数 a に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線が，曲線 $y=f'(x)$ 上の点 $(a,\ f'(a))$ における接線と直交する.

このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=f'(x)$ および直線 $x=a$ $(a<0)$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とするとき $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r}$ が有限となるような r の範囲を求めよ.

【テーマ】：微積分の融合

方針

条件（イ）から $f'(a)f''(a)=-1$ が得られますが，任意の負数 a に対して成り立つので，a を x に変えて $f'(x)f''(x)=-1$ を考えます．後は，不定積分を行い $f'(x)$, $f(x)$ を求めていきましょう.

♣ ♠

解答

(1) a を任意の負数とするとき，$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり，$y=f'(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f''(a)$ である．よって，条件（イ）より

$$f'(a)f''(a)=-1$$

が成り立つ．これより，$x<0$ に対して，$f'(x)f''(x)=-1$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\int f'(x)f''(x)\,dx=\int(-1)\,dx &\iff \int\frac{1}{2}\left[\{f'(x)\}^2\right]'dx=-\int dx\\ &\iff \frac{1}{2}\{f'(x)\}^2=-x+C\quad (C：積分定数)\\ &\iff f'(x)=\pm\sqrt{-2x+2C}\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

条件（ア）より，$f'(-2)=2(>0)$ であるから ① の符号は $+$ の方をとり，$\sqrt{4+2C}=2$ より $C=0$ を得る．したがって，$\boldsymbol{f'(x)=\sqrt{-2x}}$……**(答)**

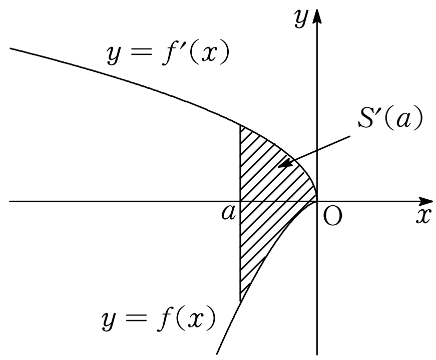
(2) (1) より，$f'(x)=\sqrt{-2x}=\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx=\int\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\,dx &\iff f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\cdot(-1)+C\quad (C：積分定数)\\ &\iff f(x)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

条件（ア）より，$f(-2)=-\dfrac{8}{3}$ であるから，

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}2^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{8}{3}\iff -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}+C=-\frac{8}{3}\qquad \therefore\ C=0$$

このとき，$f(x)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{-x}$ となるので，$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{-x}}$……**(答)**



(3)　2 曲線はいずれも原点を通り，$x<0$ において，

$$f(x)<0<f'(x)$$

を満たすので，$S(a)$ は右図の斜線部分の面積を表す．

ゆえに，

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^0 \{f'(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_a^0 \left\{f'(x)+\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right\}dx \\
&= \left[\,f(x)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-x)^{\frac{5}{2}}\,\right]_a^0 \\
&= -f(a)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-a)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}(-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}(-a)^{\frac{5}{2}} \\
&= (-a)^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3a}+\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r} &= \lim_{a\to-\infty}(-a)^{\frac{5}{2}-r}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3a}+\frac{4\sqrt{2}}{15}\right) \\
&= \begin{cases} +\infty & \left(r<\frac{5}{2}\right) \\ \frac{4\sqrt{2}}{15} & \left(r=\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(r>\frac{5}{2}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{(-a)^r}$ が有限な値に収束するための r の条件は，$\boldsymbol{r \geqq \frac{5}{2}}$……(**答**)

◇　　　　♡

解説

不定積分を行うときは，積分定数を付けることを忘れてはいけません．本問では，条件から積分定数が 0 となりますが，積分定数を書かなければ，いくら答えが合っていても原点は避けられません．条件によっては，0 にならないこともあるからです．(3) の問題のテーマは，極限が収束するための条件を求めることです．必ずできるようになっておいて下さい．頻出まではいかないものの，とても大切な考え方を含んでいます．類題もたくさんあるので，探して解いておきましょう．

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n b_n \\ b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2 \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ．

（2） $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ．

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n b_n \\ b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2 \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ．

（2） $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) は，数学的帰納法を用いて証明を行います．(2) は，背理法を用いて証明します．a_n と b_n が互いに素でないと仮定すると素数 p を公約数にもつという事実を利用しましょう．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

（ i ） $n = 3$ のとき，

与えられた漸化式に $n = 1$ を代入して $a_2 = 2$, $b_2 = 3$ を得るので，さらに $n = 2$ を代入して，

$$a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12,\ b_3 = 8 + 9 = 17$$

よって，a_3 は 3 で割り切れ，b_3 は 3 で割り切れないので，$n = 3$ のとき成り立つ．

（ii） $n = k\ (k \geqq 3)$ のとき，

$$a_k = 3l,\quad b_k = 3m \pm 1 \qquad (l,\ m \text{ は整数})$$

が成り立つと仮定すると，与えられた漸化式に $n = k$ を代入して

$$a_{k+1} = 2 \cdot 3l \cdot (3m \pm 1)$$

$2l(3m \pm 1)$ は整数であるから a_{k+1} は 3 で割り切れる．さらに，

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2 \cdot 9l^2 + (3m \pm 1)^2 \\ &= 18l^2 + 9m^2 \pm 6m + 1 \\ &= 3(6l^2 + 3m^2 \pm 2m) + 1 \end{aligned}$$

$6l^2 + 3m^2 \pm 2m$ は整数であるから，b_{k+1} は 3 で割り切れない．

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上より，3 以上のすべての自然数により，題意は成り立つことが示された． **【証明終】**

（2） **【証明】**

$n = 2$ のとき，$a_2 = 2$, $b_3 = 3$ であるから，題意をみたす．次に，$n \geqq 3$ 以上に対して，a_n と b_n が互いに素でないと仮定すると，a_n と b_n は素数 p を公約数にもつ．このとき，与えられた漸化式から

$$b_{n+1} - {b_n}^2 = 2{a_n}^2$$

であるから，b_{n+1} と b_n^2 の偶奇は一致する．b_n^2 と b_n の偶奇は一致することから b_{n+1} と b_n の偶奇は一致する．ここで，$b_1 = 1$ であることから，b_n は奇数であることがわかる．よって，公約数である素数 p は奇数となる．次に，$a_n = 2a_{n-1}b_{n-1}$ より，a_n が p で割り切れることから a_{n-1} か b_{n-1} の少なくとも一方は p で割り切れる．

（ｉ） a_{n-1} が p で割り切れるとき，

$b_{n-1}{}^2 = b_n - 2a_{n-1}{}^2$ であるから $b_{n-1}{}^2$ が p で割り切れるので，b_{n-1} は p で割り切れる．

（ii） b_{n-1} が p で割り切れるとき，

$2a_{n-1}{}^2 = b_n - b_{n-1}{}^2$ であるから $2a_{n-1}{}^2$ は p で割り切れる．$p \geqq 3$ であるから a_{n-1} が p で割り切れる．

以上より，a_{n-1}, b_{n-1} はともに p で割り切れることが示されたので，これを繰り返すことで a_2, b_2 はともに p で割り切れることになるが，$a_2 = 2, b_2 = 3$ であるから矛盾．よって，$n \geqq 2$ のとき a_n, b_n は互いに素であることが示された． **【証明終】**

◇ ♡

解説

(1) は，数学的帰納法で示します．$a_k = 3l, b_k = 3m \pm 1$ と置くことがポイントとなります．b_k は 3 で割れない数なので，2 通りのタイプが考えられますが，$b_{3k} = 3m \pm 1$ とおくことで 1 回の計算で済みます．次に (2) は論証問題です．背理法を用いて示します．a_n, b_n が互いに素であるとは，最大公約数が 1 であることを言います．すなわち，a_n, b_n が互いに素でなければ，必ず 1 以外の公約数が存在することになります．整数は，素数の積で表されるので，公約数を素数 p としています．（ｉ）では，b_n と a_{n-1} が p で割り切れるので，$b_{n-1}{}^2$ が p で割り切れます．そうすると b_{n-1} も p で割り切れることが分かります．（対偶法を用いれば簡単に証明できます．）（ii）も同様です．論証問題は，他の問題に比べて受験生が苦手とする問題ですが，演習量が足りない人が多いだけのように感じます．志望校の過去問を調べて，論証問題がよく出ているようならこのタイプの問題をしっかり演習しておきましょう．

座標平面上に 2 点 A$(1, 3)$, B$(5, -5)$ があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 $(0, 5)$ から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求めよ．

座標平面上に 2 点 A$(1, 3)$, B$(5, -5)$ があり，直線 AB に関して原点 O と対称な点を C とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 C の座標を求めよ．

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする △ABC の外接円の方程式とその中心の座標を求めよ．

(3) 点 $(0, 5)$ から △ABC の外接円に引いた接線の方程式を求めよ．

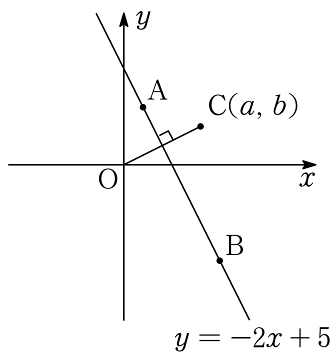
【テーマ】：円と直線の位置関係

方針

(1) は，対称点を求めるので，線分 OC の中点が直線 AB 上にあることと，直線 AB と OC が直交するという条件を用います．(2) は，外接円の中心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点であるということを用います．(3) は，円外の点から接線を引きます．点 $(0, 5)$ を通る直線を設定しましょう．

♣ ♠

解答



(1) C(a, b) とおくと，直線 AB の方程式は

$$y=\frac{-5-3}{5-1}(x-1)+3 \iff y=-2x+5$$

であり，AB $\perp$ OC となればよいので，直線 OC の傾きは $\frac{1}{2}$ である．

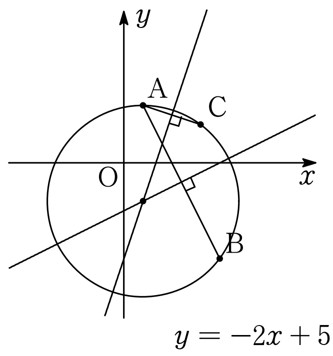
よって，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ より，$a=2b$ ……①

さらに，線分 OC の中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ が直線 AB 上にあればよいことから，

$$\frac{b}{2}=-2\cdot\frac{a}{2}+5 \iff b=-2a+10 \text{ ……②}$$

を得る．よって，①, ② より，$a=4$, $b=2$ となるので，点 C の座標は，**C(4, 2)**……(答)

(2) 線分 AB, AC の垂直二等分線の交点が △ABC の外接円の中心となる．



線分 AB の垂直二等分線は，

$$\text{点}\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3-5}{2}\right)=(3, -1)$$

を通り，傾き $\frac{1}{2}$ であるから，

$$y=\frac{1}{2}(x-3)-1 \iff y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

である．同様にして，線分 AC の垂直二等分線は，

$$\text{点}\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

を通り，傾き 3 であるから，

$$y=3\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2} \iff y=3x-5$$

である．よって，これら 2 直線の交点が外接円の中心となることから，

$$\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=3x-5 \iff x-5=6x-10 \qquad \therefore\ x=1$$

であり，このとき，$y=-2$ となる．ゆえに，外接円の中心の座標は $\boldsymbol{(1,\,-2)}$……(答)

さらに，外接円の半径は，点 $(1,\,-2)$ と $\mathrm{A}(1,\,3)$ の距離 5 に等しいので，外接円の方程式は，

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=25}\text{……(答)}$$

である．

(3)　求める接線は，点 $(0,\,5)$ を通ることから，傾きを m とすると，$y=mx+5$ とおくことができる．この直線が (2) で求めた円と接するための条件は，円の中心 $(1,\,-2)$ と直線 $y=mx+5$ の距離が円の半径 5 と等しくなるときであるから，

$$\frac{|m+2+5|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \quad\Longleftrightarrow\quad |m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると，

$$12m^2-7m-12=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (3m-4)(4m+3)=0 \qquad \therefore\quad m=\frac{4}{3},\,-\frac{3}{4}$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+5} \\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+5} \end{cases} \text{……(答)}$$

◇　♡

$\boxed{\text{解説}}$

円と直線がテーマになっている非常に標準的な問題です．対称点の求め方，外接円の求め方，円外から引いた接線の求め方など重要な問題が並んでいるので，確実にマスターしてください．なお，(3) は別解として，円上の点 $(a,\,b)$ をとり，この点での接線

$$(a-1)(x-1)+(b+2)(y+2)=25$$

が点 $(0,\,5)$ を通るという条件から

$$-(a-1)+7(b+2)=25$$

を得て，点 $(a,\,b)$ が円上の点なので，$(a-1)^2+(b+2)^2=25$ を得ることから，連立方程式を解いても求まりますが，計算量が多くなることを考えれば本解を使った方が計算間違いの可能性も低く楽でしょう．

関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ で定める.

（1） $y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ.

（2） (1) で求めた法線と x 軸および $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.

関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ で定める．

(1)　$y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で求めた法線と x 軸および $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(1) は基本問題なので，完答しましょう．(2) で面積を求める際に工夫が必要です．

♣ ♠

解答

(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ より，$x=1$ における法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)$$

となる．$f'(1)=\dfrac{1}{2}$ であり，

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

より，$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ となり，
t と θ の対応は，右の表のようになる．
よって，

t	$0\to\ 1$
θ	$0\to\ \frac{\pi}{4}$

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

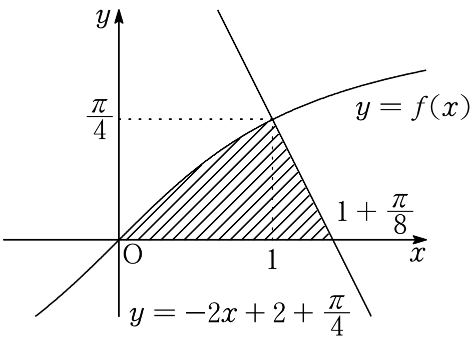
ゆえに，接線の方程式は，

$$y=-2(x-1)+\frac{\pi}{4}\iff \boldsymbol{y=-2x+2+\frac{\pi}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$f'(x)>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは単調増加である．よって，求める面積は下図斜線部分となる．

(1) で求めた法線と x 軸との交点の x 座標は，

$$0=-2x+2+\frac{\pi}{4}\iff x=1+\frac{\pi}{8}$$



となるので，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\Big[\,xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,dx+\frac{\pi^2}{64}$$
$$=f(1)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx+\frac{\pi^2}{64}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\Big[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big]_0^1+\frac{\pi^2}{64}\quad(\because\ (1))$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，基本問題ですから完答できなくてはいけません．特に，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の計算は頻出ですから，必ずできるようになっておきましょう．

(2) は，関数 $y=f(x)$ のグラフを考えなければいけませんが，高校の知識では単調増加であることを示して大まかにかけていれば十分でしょう．実は，関数 $f(x)$ は $\tan x$ の逆関数として与えられるので，高校では学習しません．したがって，本問のポイントになる部分は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の計算にあります．部分積分法を行い，

$$\{\log(1+x^2)\}' = \frac{2x}{1+x^2}$$

が成り立つことをうまく利用すれば，計算できます．

a は 1 より大きい定数とする．関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする．2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき，a の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．a が (1) で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

a は 1 より大きい定数とする．関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする．2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき，a の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．a が (1) で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(1) は，対称式を用いて計算を行わないと大変です．解と係数の関係から得られる式は対称式なのでそれとの関連をしっかりと理解しておきましょう．(2) は，$\alpha,\ \beta$ が $f'(x)=0$ の解であることを利用して，公式を使います．

♣ ♠

解答

(1) $f(x)=(x+1)(x^2-a^2)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ であるから，

$$f'(x)=3x^2+2x-a^2$$

となる．題意より $f'(x)=0$ の 2 解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots\ ① \\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{3}a^2 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは，

$$f'(-1)=3-2-a^2=1-a^2$$

であることから，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=1-a^2 \quad \cdots\cdots ③$$

をみたす a の値を求めればよい．

$$f(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2$$

$$f(\beta)=\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2$$

より，

$$\begin{aligned} f(\beta)-f(\alpha)&=(\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2)-(\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2) \\ &=(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)-a^2(\beta-\alpha) \\ &=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+\beta+\alpha-a^2) \end{aligned}$$

であるから，③ へ代入して，

$$\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+\beta+\alpha-a^2=1-a^2$$

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta=1$$

①, ② を代入して,

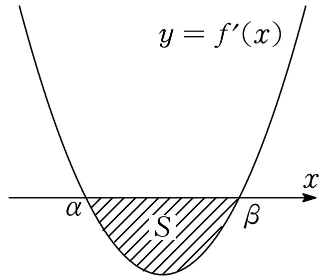
$$\frac{4}{9}+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}=1$$

$$4+3a^2-6=9 \iff a^2=\frac{11}{3}$$

$a>1$ であるから, $\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{33}}{3}}$……(答)

(2) 題意から, $y=f'(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標が α, β であるから, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta (-f'(x))\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (3x^2+2x-a^2)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{-3}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$



ここで,

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{3}=\frac{48}{9}$$

となり, $\beta-\alpha>0$ であるから, $\beta-\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ である. よって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{64\cdot 3\sqrt{3}}{27} \\ &= \boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{9}}\text{……(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は, 問題に忠実に式を作りますが, 対称式の計算が必要になるので, $f(\beta)-f(\alpha)$ をうまく計算しなければいけません. 解と係数の関係が解法のポイントとなります.

(2) は, 放物線と直線で囲まれる部分の面積を求めるので, 以下の公式が利用できます.

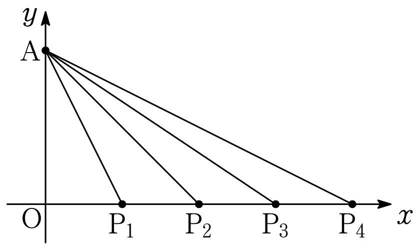
【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

教科書や参考書などでは, a がない形で書かれていると思いますが, 実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので, 2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう. これは, 面積計算をする際によく用いられます.

図のような座標平面上の点 A$(1,\ 0)$, O$(0,\ 0)$, $\mathrm{P}_n(n,\ 0)$ (n は自然数) に対して，$\theta_n = \angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O}$ とおく.



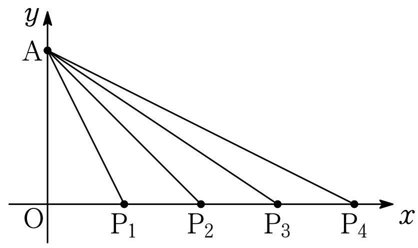
(1) $\tan(\theta_m + \theta_n) = 1$, $m \leqq n$ となる自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい.

(2) $\tan(\theta_l + \theta_m + \theta_n) = 1$, $l \leqq m \leqq n$ となる自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい.

図のような座標平面上の点 A(1, 0), O(0, 0), $\mathrm{P}_n(n,\ 0)$ (n は自然数) に対して，$\theta_n = \angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O}$ とおく．

(1)　$\tan(\theta_m + \theta_n) = 1,\ m \leqq n$ となる自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい．

(2)　$\tan(\theta_l + \theta_m + \theta_n) = 1,\ l \leqq m \leqq n$ となる自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい．



【テーマ】：整数問題（不定方程式・絞込み）

方針

(1) は，傾きと tan の関係を用いて，加法定理を利用し不定方程式を導き出します．(2) は，文字が 3 つあるので，不定方程式を求めた後で絞込みを行う必要があります．一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に注意して絞り込みます．

♣　♠

解答

(1)　直線 AP_n の傾きは $-\dfrac{1}{n}$ であるから，

$$\tan(\pi - \theta_n) = -\frac{1}{n} \iff -\tan\theta_n = -\frac{1}{n} \iff \tan\theta_n = \frac{1}{n}$$

よって，加法定理から

$$\begin{aligned}\tan(\theta_m + \theta_n) = 1 &\iff \frac{\tan\theta_m + \tan\theta_n}{1 - \tan\theta_m \tan\theta_n} = 1\\ &\iff \frac{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{1}{mn}} = 1\\ &\iff \frac{m+n}{mn-1} = 1\\ &\iff mn - 1 = n + m\\ &\iff (m-1)(n-1) = 2\end{aligned}$$

m, n は自然数より，$m - 1 \geqq 0,\ n - 1 \geqq 0$ であるから，かけて 2 となる組合せは

$$(m-1,\ n-1) = (1,\ 2),\ (2,\ 1) \iff \boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)} \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2)　(1) と同様に考えて，

$$\begin{aligned}\tan(\theta_l + \theta_m + \theta_n) = 1 &\iff \frac{\tan(\theta_l + \theta_m) + \tan\theta_n}{1 - \tan(\theta_l + \theta_m)\tan\theta_n} = 1 \quad (☜\ \theta_l + \theta_m \text{ を一塊と見て変形})\\ &\iff \frac{\dfrac{l+m}{lm-1} + \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{l+m}{lm-1}\cdot\dfrac{1}{n}} = 1 \quad (\because\ (1))\\ &\iff \frac{nl + mn + lm - 1}{n(lm-1) - l - m} = 1\\ &\iff nl + mn + lm - 1 = mnl - n - m - l\\ &\iff mnl + 1 = l + m + n + lm + mn + nl \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

両辺を $lmn \neq 0$ で割ると，

$$1+\frac{1}{lmn}=\frac{1}{mn}+\frac{1}{lm}+\frac{1}{nl}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

となる．次に，$l \geqq 4$ とすると，$l \leqq m \leqq n$ であることから，$m \geqq 4$, $n \geqq 4$ となり，

$$\frac{1}{mn}+\frac{1}{lm}+\frac{1}{nl}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{4\cdot 4}\times 3+\frac{1}{4}\times 3<1$$

となり，(左辺) >1 であることと矛盾するので不適．ゆえに，$l \leqq 3$ である．

（ i ） $l=1$ のとき，① より，

$0=2m+2n$ となるので，これをみたす自然数 m, n は存在しないので不適．

（ii） $l=2$ のとき，① より，

$mn-3m-3n=1$ となるので，$(m-3)(n-3)=10$

であり，$2 \leqq m \leqq n$ であることから，

$(m-3,\ n-3)=(1,\ 10),\ (2,\ 5) \iff (m,\ n)=(4,\ 13),\ (5,\ 8)$

（iii） $l=3$ のとき，① より，

$mn-2m-2n=1$ となるので，$(m-2)(n-2)=5$

であり，$3 \leqq m \leqq n$ であることから，

$(m-2,\ n-2)=(1,\ 5) \iff (m,\ n)=(3,\ 7)$

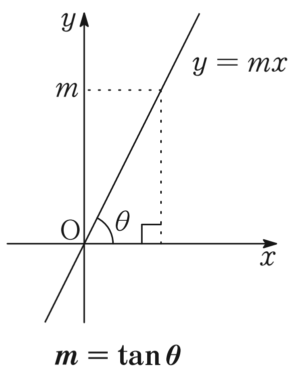
以上より，求める l, m, n の組は，

$\boldsymbol{(l,\ m,\ n)=(2,\ 4,\ 13),\ (2,\ 5,\ 8),\ (3,\ 3,\ 7)}$……(答)

解説

(1) は加法定理を用いて計算すれば，不定方程式が導き出されます．(2) も同様にして l, m, n の式が出せますが，文字が 3 つあるので，(1) のように式変形して解くのは困難です．そこで，一番小さい文字 l はそんなに大きくなれないという点に着目して，値を絞り込みましょう．

《傾きと tan の関係》



$\boldsymbol{m=\tan\theta}$

《tan の加法定理》

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

（複号同順）

k は正の定数とする．3 次関数 $f(x)=x^3-3kx^2+3kx$ について，次の各問いに答えよ．

（1） $f(x)$ が極値をもつような k の値の範囲を求めよ．

（2） $f(x)$ が $x=\alpha$ と $x=\beta$ で極値をとるとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

（3） $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$\beta-\alpha$ と $f(\alpha)-f(\beta)$ を k を用いて表せ．

（4） $f(\alpha)-f(\beta)=32$ を満たす k の値を求めよ．

k は正の定数とする．3 次関数 $f(x)=x^3-3kx^2+3kx$ について，次の各問いに答えよ．

（1） $f(x)$ が極値をもつような k の値の範囲を求めよ．

（2） $f(x)$ が $x=\alpha$ と $x=\beta$ で極値をとるとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

（3） $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$\beta-\alpha$ と $f(\alpha)-f(\beta)$ を k を用いて表せ．

（4） $f(\alpha)-f(\beta)=32$ を満たす k の値を求めよ．

【テーマ】：極値の差

方針

(1) の極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつときなので，判別式を利用します．(3) で，極値の差を求める場合は，解と係数の関係を利用して素直に計算しても求まりますが，定積分を利用すると公式が使える形になるのであっさりと答えが出せます．

♣ ♠

解答

（1） $f'(x)=3x^2-6kx+3k=3(x^2-2kx+k)$ であるから，

$x^2-2kx+k=0$ の判別式を D とすると，題意をみたす条件は $D>0$ である.，

$$D/4=k^2-k>0 \iff k<0,\ 1<k$$

$k>0$ であるから，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{k>1}$……(答)

（2） α,β は，$x^2-2kx+k=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=2k,\quad \alpha\beta=k}\text{……(答)}$$

（3） $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4k^2-4k$

であり，題意から $\beta>\alpha$ となることがわかるので，

$$\boldsymbol{\beta-\alpha=2\sqrt{k^2-k}}\text{……(答)}$$

☜ 3 次の係数が正で $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるので，$\beta>\alpha$ であることがわかります．

また，

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta) &= -\Big[\,f(x)\,\Big]_\alpha^\beta \\ &= -\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx \\ &= \frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8(k^2-k)^{\frac{3}{2}} \\ &= \boldsymbol{4(k^2-k)^{\frac{3}{2}}}\text{……(答)} \end{aligned}$$

☜ α,β は，$f'(x)=0$ の解なので，下の 解説 にある 公式 が使える．ただし，$f'(x)=3x^2-6kx+3k$ なので，2 次の係数を忘れないようにしましょう．

(4) (3) より，

$$4(k^2-k)^{\frac{3}{2}}=32$$

$$(k^2-k)^{\frac{3}{2}}=8$$

$$k^2-k=8^{\frac{2}{3}}$$

$$k^2-k-4=0 \qquad \therefore\ k=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$k>1$ より，$\boldsymbol{k=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$……(答)

解説

本問のメインは (3) の計算にあると言ってよいでしょう．(2) と $\beta-\alpha$ の値を求めよという設問は，$f(\alpha)-f(\beta)$ を計算するための準備にすぎません．もちろん正直に計算してもできますが，効率よい計算を知っておくことはいろいろな視点から問題を眺めることができるようになるため，非常に大切なのです．特に，以下の定積分の公式は，利用できる場面が多いので確実にマスターして使えるようにしておきましょう．この公式を使うときは，2 次の係数を忘れる人が多いので要注意です．

公 式

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，a がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

により定められている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

（2） a_n を n の式で表せ．

（3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_{k+1}}$ を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} ka_k \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

により定められている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

（2） a_n を n の式で表せ．

（3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_{k+1}}$ を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

漸化式が和の形で与えられているので，一度すべてをかき下してみると方針が立ちます．(2) では，(1) で求めた漸化式の両辺を $(n+1)!$ で割って a_n を計算しますが，漸化式が $n \geqq 2$ でしか成り立っていないので，注意が必要です．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた漸化式をかき下すと，

$$a_{n+1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \cdots\cdots ①$$

であり，$n \geqq 2$ のとき，同様にかき下すと，

$$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \cdots\cdots ②$$

となる．よって，① − ② から，

$$a_{n+1}-a_n=na_n \iff \boldsymbol{a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n \geqq 2)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（2） (1) で求めた漸化式の両辺を $(n+1)! \neq 0$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}$$

を得るので，

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}=\cdots\cdots=\frac{a_3}{3!}=\frac{a_2}{2!}=\frac{a_1}{2!}=\frac{1}{2}$$

☞ 解説

となる．したがって，$a_n=\dfrac{n!}{2}\ (n \geqq 2)$ であり，$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{2}$ となるので，成り立たない．
ゆえに，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1=1} \\ \boldsymbol{a_n=\dfrac{n!}{2}\quad (n \geqq 2)} \end{cases} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　(2) より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(k+1)!}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= 2\left\{\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right\}\\ &= \boldsymbol{2\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

解説

(1) は，和と一般項の関係をしっかりと理解できているかどうかがポイントになります．それを応用したものになります．

(2) は，(1) で求めた漸化式が $n \geqq 2$ のときでしか成り立つ保障がないので,

$$\frac{a_n}{n!} = \cdots\cdots = \frac{a_2}{2!}\ \cdots\cdots (*)$$

までしか計算できません．何も考えずにやってしまうと，つい

$$\frac{a_n}{n!} = \cdots\cdots = \frac{a_2}{2!} = \frac{a_1}{1!}$$

としてしまいがちなので，注意が必要です．本解では，(*) の後の計算は，元の漸化式を利用して $a_2 = a_1$ となることから,

$$\frac{a_2}{2!} = \frac{a_1}{2!} = \frac{1}{2}$$

としています．

(3) では

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_2} + \frac{2}{a_3} + \frac{3}{a_4} + \cdots\cdots + \frac{n}{a_{n+1}}$$

となるので，(2) の $a_n = \dfrac{n!}{2}$ $(n \geqq 2)$ を利用すればよく，a_1 は必要ありません．また，階乗を伴う部分分数分解

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

は，知っておくとよいでしょう．

4 枚のカードがあって，1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1 枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ とする．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする．

(i) $A_n(1),\ A_n(2)$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)\ (j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1),\ A_{n-1}(2),\ \cdots,\ A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3),\ A_n(4)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

4 枚のカードがあって，1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1 枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする．

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j = 1, 2, 3, 4$ とする．

（ i ）　$A_n(1), A_n(2)$ を求めよ．

（ii）　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \cdots, A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3), A_n(4)$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

【テーマ】：重複組合せ

方針

(1) では，漸化式を作って $A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を求めさせようと誘導しています．重複組合せの考え方を使えば (1) は簡単に答えが求められます．

♣　♠

解答

(1)（ i ）　$j = 1$ のとき，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ となればよいので，その場合の数は，$\boldsymbol{A_n(1) = 1}$……(答)

さらに，$j = 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるときであるから，$2 \leqq k \leqq n$ とするとき，

『$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$』または『$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 1$ かつ $a_k = \cdots = a_n = 2$』

となればよいので，その場合の数は，$\boldsymbol{A_n(2) = n}$……(答)

（ii）　次に，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を考える．このとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$

となるのは，

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 3$ かつ $a_n = 3$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 2$ かつ $a_n = 3$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 1$ かつ $a_n = 3$

のいずれかであるから，

$$\boldsymbol{A_n(3) = a_{n-1}(1) + a_{n-1}(2) + a_{n-1}(3)}\text{……(答)}$$

同様にして

$$\boldsymbol{A_n(4) = a_{n-1}(1) + a_{n-1}(2) + a_{n-1}(3) + a_{n-1}(4)}\text{……(答)}$$

を得る．

(1) の結果を用いると，

$$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) \iff A_n(3) = A_{n-1}(3) + n \text{ …… ①}$$

となるので，① において，n に 2 から n までを代入して辺々加えて，

$$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}\text{……(答)} \quad (n = 1 \text{ のときも成立})$$

また，

$$A_n(4)=1+(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+A_{n-1}(4) \iff A_n(4)=A_{n-1}(4)+\frac{1}{2}n(n+1) \cdots\cdots ②$$

となるので，② において，n に 2 から n までを代入して辺々加えて，

$$\begin{aligned}A_n(4)&=A_1(4)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}\cdots\cdots(\text{答})\quad(n=1\text{ のときも成立})\end{aligned}$$

(2)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1}>a_n$ となるのは，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}=j \text{ かつ } a_n<j \quad (j=2,\ 3,\ 4)$$

となるときであるから，求める確率を P とすると，

$$\begin{aligned}P&=\frac{A_{n-1}(2)\cdot 1+A_{n-1}(3)\cdot 2+A_{n-1}(4)\cdot 3}{4^n}\\&=\frac{(n-1)+n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n+1)}{4^n}\\&=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

別解

(1)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n=j$ となるのは，

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j \text{ かつ } a_n=j$$

となるときで，これは

$$1 \leqq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_{n-1}+(n-2)=j+(n-2) \text{ かつ } a_n=j+(n-2)$$

と同値であるから，

$j=1$ のとき，$A_n(1)={}_{n-1}\mathrm{C}_0=\boldsymbol{1}$……(答)

$j=2$ のとき，$A_n(2)={}_{n}\mathrm{C}_1=\boldsymbol{n}$……(答)

$j=3$ のとき，$A_n(3)={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$……(答)

$j=4$ のとき，$A_n(4)={}_{n+2}\mathrm{C}_3=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$……(答)

◇　　　　♡

解説

漸化式を作って解くという誘導がついていますが，重複組合せの考え方を用いれば簡単に解答することができます．有名な問題なので，知っておきましょう．ポイントは，イコールを取り去ることです．**別解** でとり上げたように，a_2 に 1 を加えると必ず a_1 より大きくなりますから，ここでイコールを取り去ることができます．もちろん $a_3 \sim a_{n-1}$ にも 1 を加える必要があります．次に a_3 にもさらに 1 を加えることで a_2 よりも大きくできてここのイコールも取り去ることができます．このようにして順に 1 を加えていくことで，すべてのイコールを取り去るのです．そうすれば，

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}=j+(n-2)$$

という形が得られます．その組合せは，$j+(n-2)$ 個の中から $j-1$ 個を選ぶ組合せに等しくなるので，${}_{j+(n-2)}\mathrm{C}_{j-1}$ として求めることができるのです．(○と｜の並べ方の総数の問題です．)

$\sum_{k=1}^{6} \sin k$ の符号を判別せよ．ただし，角の大きさは弧度法を用いてある．

$\sum_{k=1}^{6} \sin k$ の符号を判別せよ．ただし，角の大きさは弧度法を用いてある．

【テーマ】：和積の公式の活用

方針

どれか 2 つを組合せて，和積の公式を活用します．同じ形が出てくるように組合せることがポイントです．

♣ ♠

解答

$$\sum_{k=1}^{6} \sin k = \sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \sin 4 + \sin 5 + \sin 6$$

であるから，和積の公式を適用して，

$$\begin{aligned} \sin 1 + \sin 6 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{5}{2} \\ \sin 2 + \sin 5 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{3}{2} \\ \sin 3 + \sin 4 &= 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得るので，

$$\sum_{k=1}^{6} \sin k = 2\sin\frac{7}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2}\right)$$

となる．このとき，$\sin\frac{7}{2} = \sin 3.5 < \sin\pi = 0$ である．…… ①

次に，$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{5}{2}$ に和積の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{5}{2} &= 2\cos\frac{3}{2}\cos\frac{2}{2} \\ &= 2\cos\frac{3}{2}\cos 1 \end{aligned}$$

であるから，

$$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2} = \cos\frac{3}{2}(1 + 2\cos 1)$$

を得る．このとき，

$$\cos\frac{3}{2} > \cos\frac{\pi}{2} = 0\ ,\ \ 1 + 2\cos 1 > 0$$

であることから，

$$\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2} > 0 \text{ …… ②}$$

を得る．ゆえに，①, ② より，

$$\sum_{k=1}^{6} \sin k = 2\sin\frac{7}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{5}{2}\right) < 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{\sum_{k=1}^{6} \sin k < 0}\text{……（答）}$$

である．

♢ ♡

解説

角度が弧度法で表されていることに注意しましょう．ちなみに 1 ラジアンは $\frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$ です．

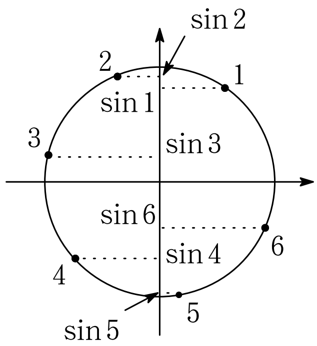
本問で必要とする知識は，和積の公式は当然ですが，$\sin x$, $\cos x$ の増減に関する知識が解答を左右します．$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で考えるとき，

$$\sin x \text{ は，} \frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi \text{ では，単調減少ですがその他の区間では単調増加}$$

です．したがって，$\sin 3.5 < \sin \pi$ が成り立ちます．同様にして，

$$\cos x \text{ は，} 0 \leqq x \leqq \pi \text{ では，単調減少ですがその他の区間では単調増加}$$

です．したがって，$\cos \frac{3}{2} > \cos \frac{\pi}{2}$ が成り立ちます．このようにして，符号を判断しなければいけません．単位円をかいて，イメージすることも大切です．



ちなみに，問題の値は $\sum_{k=1}^{6} \sin k \fallingdotseq -0.1$ です．0 に近くかなり微妙な値なので，感覚での解答は減点対象となります．

【和積の公式】

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

【積和の公式】

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\} \end{cases}$$

2 つの放物線 $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x - 3$ 上にそれぞれ動点 P, Q をとる．線分 PQ の長さが最小となるとき，P, Q の座標をそれぞれ求めよ．

2 つの放物線 $y=x^2$, $y=-x^2+4x-3$ 上にそれぞれ動点 P, Q をとる．線分 PQ の長さが最小となるとき，P, Q の座標をそれぞれ求めよ．

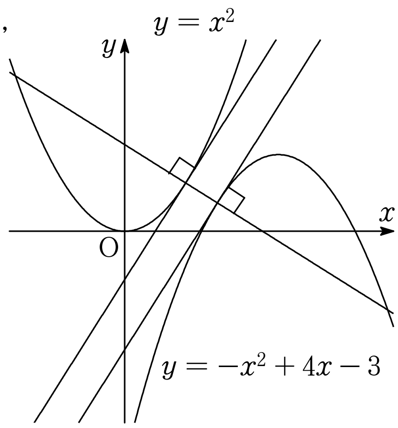
【テーマ】：曲線の最短距離

方針

曲線の最短距離を求めるためには，互いの法線が一致する場合を考えます．

♣ ♠

解答



$\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ -t^2+4t-3)$ とおくと，PQ の長さが最小となるのは，点 P, Q における法線が一致するときである．

$y=x^2$ において，$y'=2x$ であるから，点 P における法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2s}(x-s)+s^2$$

$$y=-\frac{1}{2s}x+s^2+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$y=-x^2+4x-3$ において，$y'=-2x+4$ であるから，点 Q における法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{-2t+4}(x-t)-t^2+4t-3$$

$$y=\frac{1}{2t-4}x+\frac{t}{-2t+4}-t^2+4t-3 \quad \cdots\cdots ②$$

である．よって，①, ② が一致するとき，

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2s}=\dfrac{1}{2t-4} & \cdots\cdots ③ \\ s^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{t}{-2t+4}-t^2+4t-3 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立てばよい．③ より，

$$2t-4=-2s \iff t-2=-s$$

これを ④ に代入して t を消去すると，

$$\begin{aligned} s^2+\frac{1}{2} &= -\frac{t}{2(t-2)}-(t^2-4t)-3 \\ &= -\frac{(t-2)+2}{2(t-2)}-(t-2)^2+1 \\ &= \frac{-s+2}{2s}-s^2+1 \end{aligned}$$

両辺に $2s$ をかけて，

$$2s^3+s=-s+2-2s^3+2s \iff s^3=\frac{1}{2}$$

ゆえに，$s=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$t=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+2$ を得るので，このとき，

$$s^2=\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -t^2+4t-3=-(t-2)^2+1=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+1$$

となるので，点 P, Q の座標は，

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right),\ \mathbf{Q}\left(2-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

$\boxed{解説}$

本問では放物線を扱っていますが，どのような曲線でも同じような考え方で解決できます．s を消去して t の式を作ると，うまく答えが出せません．$t-2=-s$ という式をうまく使って計算をするためには，計算テクニックを磨いておく必要があります．

また，2 点間の距離を d として，

$$d^2=(s-t)^2+(s^2+t^2-4t+3)^2$$

の最小値を考えるという方法もありますが，$s,\ t$ について 4 次式となるため，計算がかなり大変で現実的ではありません．

xyz 空間において半径が 1 で x 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_1 と，半径が 1 で y 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_2 がある．C_1 と C_2 の共通部分のうち $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分を K とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　u を $-1 \leqq u \leqq 1$ を満たす実数とするとき，平面 $z = u$ による K の切断面の面積を求めよ．

(2)　K の体積を求めよ．

xyz 空間において半径が 1 で x 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_1 と，半径が 1 で y 軸を中心軸として原点から両側に無限に伸びている円柱 C_2 がある．C_1 と C_2 の共通部分のうち $y \leqq \dfrac{1}{2}$ である部分を K とおく．以下の問いに答えよ．

（1） u を $-1 \leqq u \leqq 1$ を満たす実数とするとき，平面 $z=u$ による K の切断面の面積を求めよ．

（2） K の体積を求めよ．

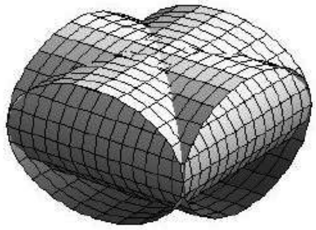
【テーマ】：２つの円柱の共通部分の体積

方針

想像しにくい立体ですが，一度は経験しておきたい図形です．いくつかの大学で類題が出題されています．

♣ ♠

解答



（1） 円柱 C_1 と円柱 C_2 の内部を表す式はそれぞれ，

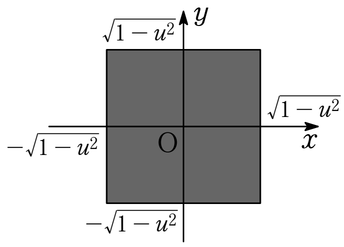
$$\begin{cases} C_1 : y^2+z^2 \leqq 1 & \cdots\cdots ① \\ C_2 : x^2+z^2 \leqq 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．ここで，平面 $z=u\ (-1 \leqq u \leqq 1)$ による切断面を表す式は，
①, ② に $z=u$ を代入して得られる次の 2 つの不等式の共通部分である．

$$\begin{cases} y^2 \leqq 1-u^2 \\ x^2 \leqq 1-u^2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} |y| \leqq \sqrt{1-u^2} \\ |x| \leqq \sqrt{1-u^2} \end{cases}$$

$\sqrt{1-u^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1-u^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1$ である．

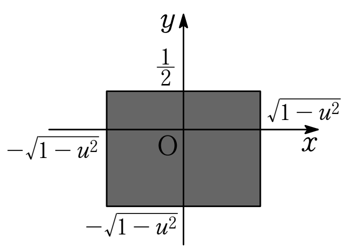
（ｉ） $\sqrt{1-u^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1$ のとき，



切断面は，右図のようになるので，その面積を $S(u)$ とすると，

$$S(u) = \left(2\sqrt{1-u^2}\right)^2 = 4(1-u^2)$$

（ii） $\sqrt{1-u^2} \geqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $|u| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，



切断面は，右図のようになるので，その面積を $S(u)$ とすると，

$$\begin{aligned} S(u) &= 2\sqrt{1-u^2} \times \left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-u^2}\right) \\ &= \sqrt{1-u^2}+2(1-u^2) \end{aligned}$$

ゆえに，(ｉ), (ii) より，切断面の面積 $S(u)$ は，

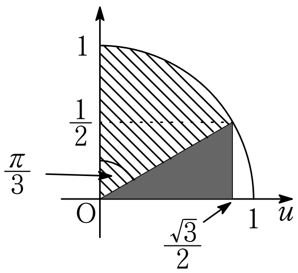
$$\boldsymbol{S(u)} = \begin{cases} \boldsymbol{4(1-u^2)} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq |u| \leqq 1\right) \\ \boldsymbol{\sqrt{1-u^2}+2(1-u^2)} & \left(|u| \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果から，求める K の体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{\sqrt{1-u^2}+2(1-u^2)\right\} du + \underbrace{2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 4(1-u^2)\,du}_{\text{① 2 つに分ける}} \\
&= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-u^2}\,du + \underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4(1-u^2)\,du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 4(1-u^2)\,du}_{\text{② 積分区間をつなげる}} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 4(1-u^2)\,du \\
&= 2\underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-u^2}\,du}_{(*)\text{ 下図の面積を参考に値を計算}} + 4\int_0^1 (1-u^2)\,du + 4\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-u^2)\,du \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + 4\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 + 4\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+4\cdot\frac{2}{3}-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+4\cdot\frac{2}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{16}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{4}} \cdots\cdots (\textbf{答})
\end{aligned}
$$

である．



(*) の積分計算で利用した面積

◇ ♡

解説

共通部分の図が想像しにくいので，2 つの円柱が交わる様子をコンピュータで描いて解答中に掲載しました．想像力があれば解答の助けになることは間違いありませんが，図が想像できない問題でも解答できる力を養っておくことは大切です．切断面の様子が u の値によって変化し，なおかつ面積を求める方法も変わってくるので，場合分けが必要になるやや面倒な問題です．

(2) の体積計算ですが，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-u^2}\,du$ の計算を行う際に置換積分をする方法と，円の面積を用いる方法があります．解答では，扇形の面積に三角形の面積を加えるという考え方で定積分の値を計算しました．

整式 x^n を整式 $x(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．ただし，n は正の整数とする．

整式 x^n を整式 $x(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．ただし，n は正の整数とする．

【テーマ】：整式の除法と微分法

方針

3 次式で割った余りは，2 次式以下なので，余りを ax^2+bx+c とおき，商は次数がわからないので $Q(x)$ とおいて式を作ります．方程式 $x(x-1)^2=0$ の解に重解が含まれるので，両辺を微分しましょう．

♣ ♠

解答

x^n を $x(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと，

$$x^n = x(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

①に $x=0, 1$ を代入すると，それぞれ

$$\begin{cases} 0=c & \cdots\cdots ② \\ 1=a+b+c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

となる．また，①の両辺を x で微分すると，

$$nx^{n-1}=(x-1)^2Q(x)+2x(x-1)Q(x)+x(x-1)^2Q'(x)+2ax+b$$

となるので，この式に $x=1$ を代入して，

$$n=2a+b \cdots\cdots ④$$

を得る．②〜④より，これを解いて

$$a=n-1,\quad b=2-n,\quad c=0$$

ゆえに，求める余りは，$\boldsymbol{(n-1)x^2+(2-n)x}$……**(答)**

♢ ♡

解説

重解をもつタイプでは，微分が利用できます．理系の人は，数学 Ⅲ で積の微分法を学習するので大丈夫だと思いますが，文系の人や理系でもまだ未学習の人は，次の積の微分の公式を知っておくと便利です．特に，文系の人は数学 Ⅲ だから覚えなくていいだろうという意識をもつのではなく，本問のような問題が出たときに使える公式なので，必ず知っておきましょう．

【積の微分法】

u, v, w は x の関数であるとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$(uv)'=u'v+uv',\quad (uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

$a > 0$ とする．関数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x - 3a^3$ が直線 $y = mx$ と原点以外で接しているとする．

（1） $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

（2） m を a を用いて表せ．

（3） $y = f(x)$ と $y = mx$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a) \geqq 2^{12}$ をみたす最小の自然数 a を求めよ．

$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x-3a^3$ が直線 $y=mx$ と原点以外で接しているとする．

（1） $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

（2） m を a を用いて表せ．

（3） $y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)\geqq 2^{12}$ をみたす最小の自然数 a を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) の接線が原点を通るときを考えて，m の値を求めます．

♣ ♠

解答

（1） $f'(x)=3x^2-2ax-a^2$ であるから，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= (3t^2-2at-a^2)(x-t)+t^3-at^2-a^2t-3a^3 \\ &= (3t^2-2at-a^2)x-2t^3+at^2-3a^3 \end{aligned}$$

よって，接線の方程式は，$\boldsymbol{y=(3t^2-2at-a^2)x-2t^3+at^2-3a^3}$……**(答)**

（2） (1) で求めた接線の方程式が原点を通るとき，

$$-2t^3+at^2-3a^3=0$$
$$2t^3-at^2+3a^3=0$$
$$(t+a)(2t^2-3at+3a^2)=0$$

$2t^2-3at+3a^2=0$ の判別式を D とすると，$a>0$ であることから $D=9a^2-24a^2=-15a^2<0$ となる．t は実数であるから，$t=-a$ のみが解となる．このとき，接線の方程式は，

$$y=(3a^2+2a^2-a^2)x \iff y=4a^2x$$

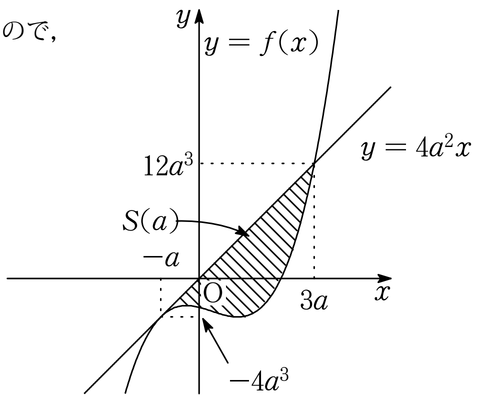
これが $y=mx$ と一致すればよいことから $\boldsymbol{m=4a^2}$……**(答)**

（3） $y=4a^2x$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標は，

$$x^3-ax^2-a^2x-3a^3=4a^2x \iff x^3-ax^2-5a^2x-3a^3=0 \iff (x+a)^2(x-3a)=0$$

すなわち，$x=-a,\ 3a$ である．$a>0$ であることから $-a<3a$ なので，

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-a}^{3a}\{4a^2x-(x^3-ax^2-a^2x-3a^3)\}\,dx \\ &= -\int_{-a}^{3a}(x+a)^2(x-3a)\,dx \\ &= -\frac{-1}{12}\{3a-(-a)\}^4 \\ &= \frac{64}{3}a^4 \end{aligned}$$



これより，$\dfrac{64}{3}a^4\geqq 2^{12}$ すなわち $a^4\geqq 192$ が成り立つので，

$$3^4 = 81,\quad 4^4 = 256$$

であることから，求める最小の自然数 a の値は $\boldsymbol{a = 4}$……(**答**)

◇ ♡

解説

(1) は, 接線の方程式を求める基本問題です．この結果を使って (2) を計算します．これは, $y = mx$ が $y = f(x)$ に接すると考えるのではなく，曲線の接線が原点を通るときは，その接線が $y = mx$ と一致すると考えるのです．頻出の考え方なので必ずできるようになっておきましょう．

(3) において，$y = 4a^2x$ と $y = f(x)$ の交点を求めるときは，$x = -a$ で接することから

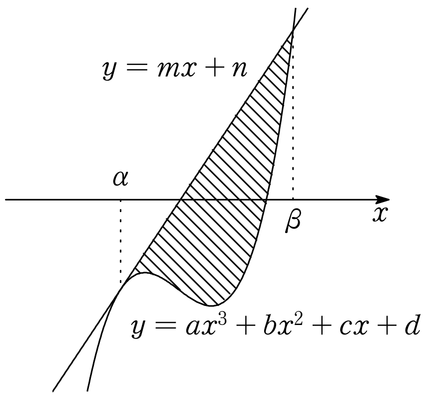
$$x^3 - ax^2 - 5a^2x - 3a^3 \text{ は } (x+a)^2 \text{ を因数にもつ}$$

ことがわかります．このことから，$(x+a)^2(x+b) = 0$ (3 次の係数は 1 であることに注意) の形に因数分解できるはずなので，展開したときの定数項を比較することから $b = -3a$ であることは容易に求まります．このように考えれば，暗算で因数分解をすることができます．

【面積の計算】

3 次関数のグラフと直線が接するとき，それらによって囲まれる部分の面積を S とすると，次式が成り立つ．
なお，接点の x 座標を α とし，その他の交点の x 座標を β とする．

$$S = \left| \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx \right| = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$



➾**注：**3 次の係数 a を忘れないようにしましょう．

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^n x + \cos^n x)\, dx$$

このとき，次の各問いに答えよ.

（1） a_1, a_2 を求めよ.

（2） n が奇数のとき，$a_n = 0$ となることを示せ.

（3） n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ.

（4） a_{10} を求めよ.

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx$$

このとき，次の各問いに答えよ．

（1）　$a_1,\,a_2$ を求めよ．

（2）　n が奇数のとき，$a_n=0$ となることを示せ．

（3）　n が偶数のとき，a_n と a_{n-2} の関係式を求めよ．

（4）　a_{10} を求めよ．

【テーマ】：三角関数の積分

方針

n が奇数のときは，定積分の値は 0 になり，偶数のときは漸化式を作ります．誘導されています．漸化式を作るときは，部分積分法を利用します．

♣　♠

解答

（1）

$$\begin{aligned}a_1&=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)\,dx\\&=2\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx\\&=2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\\&=\mathbf{0}\cdots\cdots(\quad)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2&=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx\\&=2\int_{0}^{\pi}dx\\&=2\Big[x\Big]_0^{\pi}\\&=\boldsymbol{2\pi}\cdots\cdots(\quad)\end{aligned}$$

（2）

n が奇数のとき，$f(x)=\sin^n x$ とおくと，

$$f(-x)=\sin^n(-x)=(-\sin x)^n=-\sin^n x=-f(x)$$

となるので，$y=f(x)$ は奇関数であり，同様にすると，$y=\cos^n x$ は偶関数であることが示されるので，

$$a_n=2\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx$$

となる．ここで，$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$dx=dt$ であり，

右の表より，

x	0	$\to$	π
t	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}a_n&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt\\&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin t)^n\,dt\\&=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt\\&=0\end{aligned}$$

（☜　$\sin^n t$ は奇関数なので，定積分の値は 0 になる）

よって，題意は示された．　$\cdots\cdots(\quad)$

(3)　n が偶数のとき，$y=\sin^n x+\cos^n x$ は偶関数となるので，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\
&= 2\int_0^{\pi}(\sin x\sin^{n-1}x+\cos x\cos^{n-1}x)\,dx \\
&= 2\Big[-\cos x\sin^{n-1}x+\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\pi} \\
&\qquad -2\int_0^{\pi}\left\{-(n-1)\cos^2 x\sin^{n-2}x-(n-1)\sin^2 x\cos^{n-2}x\right\}\,dx \\
&= 2(n-1)\int_0^{\pi}\left\{(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x+(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\right\}\,dx \\
&= 2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)\,dx-2(n-1)\int_0^{\pi}(\sin^n x+\cos^n x)\,dx \\
&= (n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n
\end{aligned}
$$

ゆえに，$na_n=(n-1)a_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}}$……(　)

(4)　(1), (3) の結果より

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\
&= \frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\text{……(　)}
\end{aligned}
$$

―――――――― ◇ ―――――――― ♡ ――――――――

解説

本問では a_n を求めることまでは問うてないが，実は (3) で求めた漸化式から a_n を求めることができる．式変形がちょっと難しいが，参考までに次のような式変形の仕方も知っておいてもらいたい．

$n=2m$ のとき，(3) で得られた漸化式から，

$$
\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot a_2 \\
&= \frac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 4\cdot 3}{\{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 6\cdot 4\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{\dfrac{(2m)!}{2\cdot 1}}{\{2^{m-1}m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}\{m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\}^2}\pi \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2m-2}(m!)^2}\pi
\end{aligned}
$$

となるので，$m=\dfrac{n}{2}$ であることから，$a_n=\dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi$ である．

ゆえに，これと (2) の結果から，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{n} & \boldsymbol{a_n=0} \\
\boldsymbol{n} & \boldsymbol{a_n=\dfrac{n!}{2^{n-2}\left(\dfrac{n}{2}!\right)^2}\pi}
\end{cases}
\text{……(　)}
$$

となるのである．これを用いても (4) は解答することができる．

$$
a_{10}=\frac{10!}{2^8\cdot(5!)^2}\pi=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^8\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\pi=\boldsymbol{\frac{63}{64}\pi}\text{……(　)}
$$

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ について，曲線 $y=f(x)$ を C とし，正の数 t に対し曲線 $y=f(x-t)$ を C_t とする．

(1) C_t と C が相異なる 2 点で交わるような t が存在するための a, b の満たす必要十分条件を求めよ．

(2) a, b が (1) の条件を満たすとする．C_t と C が相異なる 2 点で交わるとき，この 2 つの曲線によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく．$S(t)$ を最大にする t の値と $S(t)$ の最大値を求めよ．

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ について，曲線 $y=f(x)$ を C とし，正の数 t に対し曲線 $y=f(x-t)$ を C_t とする．

(1) C_t と C が相異なる 2 点で交わるような t が存在するための a, b の満たす必要十分条件を求めよ．

(2) a, b が (1) の条件を満たすとする．C_t と C が相異なる 2 点で交わるとき，この 2 つの曲線によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく．$S(t)$ を最大にする t の値と $S(t)$ の最大値を求めよ．

方針

(2) では，$S(t)$ が t について無理関数になるので，このままでは，解くのが面倒です．そこで $\{S(t)\}^2$ を計算することを考え，さらに置き換えによって，次数を下げることを行います．

解答

(1) $f(x-t)=f(x)$ とおくと，

$$(x-t)^3+a(x-t)^2+b(x-t)=x^3+ax^2+bx$$
$$-3tx^2+3t^2x-t^3-2atx+at^2-bt=0$$
$$3tx^2-(3t^2-2at)x+t(t^2-at+b)=0$$

$t \fallingdotseq 0$ であるから，

$$3x^2+(2a-3t)x+(t^2-at+b)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．C_t と C が相異なる 2 点で交わるためには，この方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよいので，判別式を D とすると，

$$D=(2a-3t)^2-12(t^2-at+b)>0$$
$$4a^2-3t^2-12b>0 \qquad \therefore \quad 3t^2<4(a^2-3b) \quad \cdots\cdots ②$$

$t^2>0$ であるから，② を満たす t が存在するためには，$a^2-3b>0$ であることが必要で，逆にこのとき，不等式 ② を満たす t の値が存在するので，十分性も満たされている．

ゆえに，求める a, b の満たす条件は，$\boldsymbol{a^2-3b>0}$……(　)

(2) 題意から，方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつので，その 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=-\frac{2a-3t}{3}, \quad \alpha\beta=\frac{t^2-at+b}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．さらに，$t>0$ であるから，

☜ $t>0$ なので，x 軸の正の方向に平行移動した $f(x-t)$ のグラフの方が上にある

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_\alpha^\beta \{f(x-t)-f(x)\}\,dx\\&=-t\int_\alpha^\beta \{3x^2+(2a-3t)x+(t^2-at+b)\}\,dx\\&=-3t\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=-\frac{-3t}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\{S(t)\}^2 &= \frac{t^2}{4}\{(\beta-\alpha)^2\}^3 \\
&= \frac{t^2}{4}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^3 \\
&= \frac{t^2}{4}\left\{\frac{(2a-3t)^2}{9}-4\cdot\frac{t^2-at+b}{3}\right\}^3 \quad (\because\ ③) \\
&= \frac{t^2}{4}\left(\frac{-3t^2+4a^2-12b}{9}\right)^3
\end{aligned}
$$

ここで，$t^2=X$ とおくと，② から $0<X<\dfrac{4(a^2-3b)}{3}$ であり，$\{S(t)\}^2=g(X)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g(X) &= \frac{X}{4\cdot 9^3}(-3X+4a^2-12b)^3 \\
g'(X) &= \frac{1}{4\cdot 9^3}\{(-3X+4a^2-12b)^3-9X(-3X+4a^2-12b)^2\} \quad ☞\ \boxed{\text{解説}} \\
&= -\frac{(-3X+4a^2-12b)^2(3X-a^2+3b)}{9^3}
\end{aligned}
$$

② より，$(-3X+4a^2-12b)^2>0$ であるから，$g'(X)=0$ のとき，$X=\dfrac{a^2-3b}{3}\,(>0)$ である．

X	0	$\cdots$	$\dfrac{a^2-3b}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{4(a^2-3b)}{3}$
$g'(X)$		$+$	0	$-$	
$g(X)$		↗	極大	↘	

よって，増減表より $X=\dfrac{a^2-3b}{3}$ のとき，$g(X)$ は極大かつ最大となるので，このとき，$g(X)$ すなわち $\{S(t)\}^2$ の最大値は，

$$
g\left(\frac{a^2-3b}{3}\right)=\frac{a^2-3b}{12\cdot 9^3}(3a^2-9b)^3=\left\{\frac{(a^2-3b)^2}{18}\right\}^2
$$

となる．$S(t)>0$ であるから，

$$
\boldsymbol{t=\sqrt{\frac{a^2-3b}{3}}} \qquad\qquad \boldsymbol{\frac{(a^2-3b)^2}{18}}\cdots\cdots(\quad)
$$

である．

$\boxed{\text{解説}}$

(2) では，$S(t)$ の次数が高くなるので，置き換えなどを行って次数を下げるほうが計算が楽になります．とは言っても $g(X)$ は X についての 4 次関数なので，微分をするときは，以下の積の微分公式を使って楽に微分しましょう．内容的には数学 Ⅲ の範囲ですが，文系の人でも知っておくとよいでしょう．

$u,\ v,\ w$ は x の関数であるとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$
(uv)'=u'v+uv'\ ,\quad (uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'
$$

負でない整数 k に対して $a_k=\int_0^1 e^{-x}x^k\,dx$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $k \geqq 1$ のとき，a_k と a_{k-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $b_k=\dfrac{a_k}{k!}$ とおく．$k \geqq 1$ のとき，b_k と b_{k-1} の間の関係を求め，これよりすべての自然数 n に対して $b_n-b_0=-e^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$ が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，これを用いて $e=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ となることを証明せよ．

負でない整数 k に対して $a_k = \int_0^1 e^{-x}x^k\,dx$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$k \geqq 1$ のとき，a_k と a_{k-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　$b_k = \dfrac{a_k}{k!}$ とおく．$k \geqq 1$ のとき，b_k と b_{k-1} の間の関係を求め，これよりすべての自然数 n に対して $b_n - b_0 = -e^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$ が成り立つことを示せ．

(3)　すべての自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，これを用いて $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ となることを証明せよ．

方針

(1) の漸化式は，部分積分法を用いて導きます．また，(2) では漸化式を解くことになりますが，(1) で求めた漸化式の両辺を $k!(\neq 0)$ で割ってみましょう．(3) では，はさみうちの原理を利用します．

♣　♠

解答

(1)　部分積分法を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} a_k &= \Big[-e^{-x}x^k\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})kx^{k-1}\,dx \\ &= -e^{-1} + k\int_0^1 e^{-x}x^{k-1}\,dx \\ &= -e^{-1} + ka_{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに，求める関係式は，$\boldsymbol{a_k = ka_{k-1} - \dfrac{1}{e}}$……(答)

(2)　(1) で求めた漸化式の両辺を $k!(\neq 0)$ で割ると，

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{ka_k}{k!} - \frac{1}{e(k!)} \iff \frac{a_k}{k!} = \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} - \frac{1}{e(k!)}$$

よって，$b_k = \dfrac{a_k}{k!}$ とおけば，$\boldsymbol{b_k = b_{k-1} - \dfrac{1}{e(k!)}}$……(答) を得る．

【証明】　$b_k = b_{k-1} - \dfrac{1}{e(k!)}$ において，$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ を代入すると，

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 - \frac{1}{e(1!)} \\ b_2 &= b_1 - \frac{1}{e(2!)} \\ b_3 &= b_2 - \frac{1}{e(3!)} \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} - \frac{1}{e(n!)} \end{aligned}$$

☜ 階差数列と捉えて計算することもできます．その際は，

$$b_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e(k!)}$$

となります．しかし，通常より番号が少しずれているので，間違える可能性が高いため注意が必要です．

となるので，これらの辺々を加えると，

$$b_n = b_0 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}\right) \iff b_n - b_0 = -e^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

よって，示された. **（証明終）**

(3) **【証明】**

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ が成り立つので，

$$0 \leqq e^{-x}x^n \leqq x^n \qquad (\because \ x^n \geqq 0)$$

が成り立つ．よって，各辺を 0 から 1 まで定積分して，

$$\int_0^1 0\,dx \leqq \int_0^1 e^{-x}x^n\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx \iff 0 \leqq a_n \leqq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

を得るので，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が示された．この式において $n \to \infty$ とすると，はさみうちの原理により，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ となるので，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!} = 0$

したがって，(2) で示した式において，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} b_n - b_0 = -e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} \iff eb_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

を得る．

$$b_0 = \frac{a_0}{0!} = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + 1 \qquad (\because \ 0! = 1)$$

であるから，

$$-1 + e = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} \iff e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

が成り立ち，示された. **（証明終）**

◇ ♡

解説

この問題の目的は，e の値を無限級数で表すことです．類似の問題は，様々な大学で数多く出題されています．すなわち，解答の流れをしっかりと理解して，誘導が多少なくても結論までたどり着けるようにしておくようにしましょう．

(3) の前半で積分不等式を作り $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ をはさみうちの原理を用いて求めましたが，この積分不等式を作る問題は頻出です．ポイントは，積分区間で成り立つ不等式を作ることです．ただし，目的の不等式の形を見定めてから作らないといけません．本問でもしも $e^{-1} \leqq e^{-x} \leqq 1$ という不等式を母体にして計算を進めていくと結論は得られません．適切な不等式を母体にすることが大切なのです.

(1)　$\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ.

(2)　$\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10} = \dfrac{5}{16}$ を示せ.

(1)　$\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ．

(2)　$\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10} = \dfrac{5}{16}$ を示せ．

【テーマ】：チェビシェフ多項式

方針

(1) は，加法定理・２倍角の公式・３倍角の公式などを駆使すれば求められます．(2) は，(1) で求めた多項式を利用しますが，θ をどのように決めるかがポイントです．

♣　♠

解答

(1)　$\cos\theta = x$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)\\
&= \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta\\
&= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\
&= (4x^3 - 3x)(2x^2 - 1) - (6\sin^2\theta\cos\theta - 8\sin^4\theta\cos\theta)\\
&= (4x^3 - 3x)(2x^2 - 1) - (6(1 - x^2)x - 8(1 - x^2)^2 x)\\
&= 8x^5 - 10x^3 + 3x - (-8x^5 + 10x^3 - 2x)\\
&= \boldsymbol{16x^5 - 20x^3 + 5x} \cdots\cdots \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2)　**【証明】**

$\theta = \dfrac{\pi}{10}$，$\dfrac{3\pi}{10}$，$\dfrac{7\pi}{10}$，$\dfrac{9\pi}{10}$ のそれぞれに対して $\cos 5\theta = 0$ であるから，(1) より，$f(\cos\theta) = 0$ である．すなわち，これら 4 つの θ の値は，方程式 $f(\cos\theta) = 0$ の解となる．また，この 4 つの θ の値に対して $\cos\theta \fallingdotseq 0$ であり，どの 2 つも等しくはない．一方 (1) で得た多項式から，

$$f(x) = x(16x^4 - 20x^2 + 5)$$

と因数分解されるので，先ほどの 4 つの θ に対して $\cos\theta$ の値をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とおくと，これらは方程式

$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ の異なる 4 つの実数解である．よって，

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 16(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

と因数分解されるので，定数項に着目すると，$\alpha\beta\gamma\delta = \dfrac{5}{16}$ であるから，

$$\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16}$$

が示された．　**(証明終)**

♢　♡

解説

一般に $\cos n\theta$ は，$\cos\theta$ の多項式で表すことができます．(数学的帰納法を用いれば容易に示せます．) チェビシェフ多項式と呼ばれる有名問題を題材にしています．一般に，0 以上の整数に対してチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は，

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

と表されます．$n=2, 3$ のときは，それぞれ２倍角の公式・３倍角の公式としてなじみがあると思います．本問は，$n=5$ のときを扱っています．

このチェビシェフ多項式は様々な大学で出題されています．本問は，京都大学文系で出題された問題ですが，同年の京都大学理系の問題で，もう少し一般的な問題が出題されています．

問題（’96　京都大）

n は自然数とする．

（1）　すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),\quad \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ．

（2）　$f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ．

（3）　p を 3 以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ．

証明の概略ですが，(1) は数学的帰納法で示します．(2) は，$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分します．(3) は，$f_p(x)$ を具体的に表して，(2) の結果を利用します．

不等式

$$-\sin x \leqq y \leqq \cos 2x\ ,\quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

で定義される xy 平面内の領域を K とおく．次の問いに答えよ．

（1） K の面積を求めよ．

（2） K を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

不等式

$$-\sin x \leqq y \leqq \cos 2x\ ,\quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

で定義される xy 平面内の領域を K とおく．次の問いに答えよ．

（1） K の面積を求めよ．

（2） K を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

面積や体積を求める問題では，グラフをかいて考えます．なぜなら本問のように考えている領域が回転軸を含んでいると単純に行かないからです．領域 K は x 軸をまたいでいるので，x 軸のまわりに回転させるときは注意が必要です．

♣ ♠

解答

（1） $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，

$$\cos 2x-(-\sin x)=1-2\sin^2 x+\sin x=-(2\sin x+1)(\sin x-1) \geqq 0$$

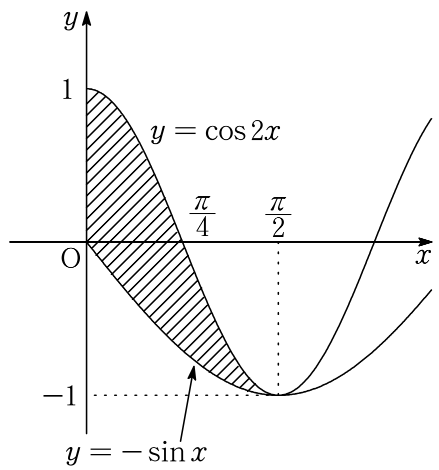
であるから，領域 K は右図の斜線部分になる．

その面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos 2x-(-\sin x)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\mathbf{1}\text{……（答）}$$



（2） $y=\sin x$ と $y=\cos 2x$ の交点の x 座標は，

$$\sin x=\cos 2x$$

$$\iff\quad (2\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $x=\dfrac{\pi}{6}$ である．

領域 K を x 軸のまわりに 1 回転させるときにできる回転体を xy 平面で切りとってできる図形で，$y \geqq 0$ にある部分は，右図の斜線部分のようになる．

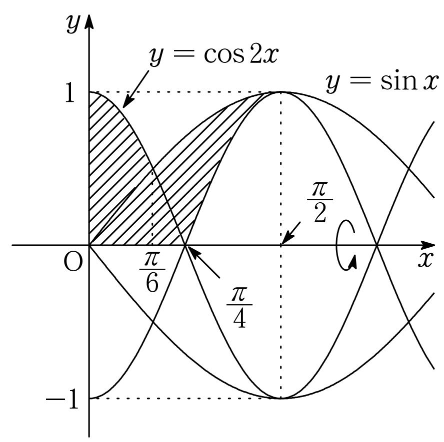
この斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積が求める体積となる．すなわち，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ では，$y=\cos 2x$ を，

$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ では $y=\sin x$ を，

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $y=\sin x$ と $y=-\cos 2x$ を

それぞれ x 軸のまわりに 1 回転させると考えればよい．



ゆえに，求める回転体の体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi\cos^2 2x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 2x dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 4x}{2}dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx - \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\,x+\frac{1}{4}\sin 4x\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\left[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\left[\,x+\frac{1}{4}\sin 4x\,\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{16}(2\pi+3\sqrt{3})}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

回転体の体積を求める問題です．x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めるときは，回転させる図形が x 軸を含んでいるかどうかが重要になってきます．本問のように x 軸を含んでいるときは，x 軸よりも下にある部分を x 軸に関して対称移動させた図形を考えることが大切です．

(1)　t が $t>1$ の範囲を動くとき，関数 $f(t)=\log_2 t+\log_t 4$ の最小値を求めよ.

(2)　$t>1$ なるすべての t に対して，不等式

$$k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+2$$

が成り立つような k の範囲を求めよ.

(1)　t が $t>1$ の範囲を動くとき，関数 $f(t)=\log_2 t+\log_t 4$ の最小値を求めよ.

(2)　$t>1$ なるすべての t に対して，不等式

$$k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+2$$

が成り立つような k の範囲を求めよ.

【テーマ】：指数関数と対数不等式

方針

指数関数の最小値を求める問題です．まずは,底をそろえましょう．t の範囲が与えられているので，$\log_2 t>0$ であることと,逆数の形が出てくることから相加平均・相乗平均の関係を使うことができます.(2) では，$x=\log_2 t$ とおいて，x の 2 次関数に帰着させましょう.

♣　♠

解答

(1)　$f(t)=\log_2 t+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 t}=\log_2 t+\dfrac{2}{\log_2 t}$ であり，$t>1$ より $\log_2 t>0$ となるので，相加平均・相乗平均の関係より，

$$\log_2 t+\frac{2}{\log_2 t}\geqq 2\sqrt{\log_2 t\cdot\frac{2}{\log_2 t}}=2\sqrt{2}$$

等号は，$\log_2 t=\dfrac{2}{\log_2 t}$ すなわち

$$(\log_2 t)^2=2 \text{ より } \log_2 t=\sqrt{2}\quad(\because\ \log_2 t>0)$$

したがって，$t=2^{\sqrt{2}}$ のとき成立する．ゆえに，

$t=2^{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$……(答)

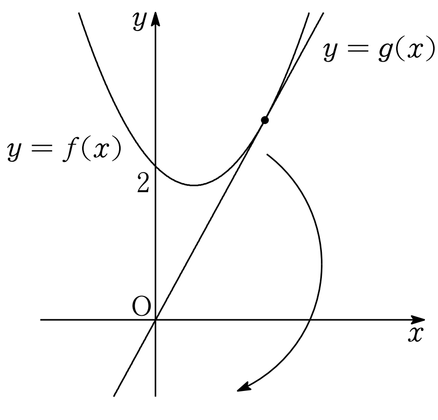
(2)　$t>1$ より $x=\log_2 t$ とおくと，$x>0$ である．このとき，

$$kx<x^2-x+2$$

であり，$f(x)=x^2-x+2$, $g(x)=kx$ とおくと，

$$x>0 \text{ で常に } g(x)<f(x)$$

となるように実数 k のとり得る値の範囲を求めればよい.



右図のように $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が第 1 象限で接するときの k の値は,

$$x^2-x+2=kx \iff x^2-(k+1)x+2=0$$

の判別式を D とすると $k>0$ かつ $D=0$ のときであるから,

$$D=(k+1)^2-4\cdot 2=0 \iff (k+1)^2=8$$

$$k>0 \text{ より，} k=-1+2\sqrt{2}$$

$x>0$ で常に $g(x)<f(x)$ となるためには，直線 $y=g(x)$ の傾きが $-1+2\sqrt{2}$ より小さければよいので,

求める k の範囲は，

$$\boldsymbol{k < -1 + 2\sqrt{2}} \cdots\cdots \text{(答)}$$

◇ ♡

解説

ポイントは，置き換えにあります．置き換えしたら新しい文字の範囲に十分気を付けなければいけません．
$x = \log_2 t$ で $t > 1$ なので，対数関数を考えれば x のとり得る値はすぐに求められますし，$t > 1$ の両辺に底が 2 の対数をとることで，

$$\log_2 t > \log_2 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0$$

となり，x の範囲を求めることもできます．ただし対数の不等式においては，底が 1 より大きいか小さいかに気を付けないといけないので注意が必要です．

問題としては，標準的なので受験生は完答を目指しましょう．

等式 $a_n + b_n\sqrt{5} = (2+\sqrt{5})^n$ によって定められる自然数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について，

（1） $a_{n+1} = 2a_n + 5b_n$，$b_{n+1} = a_n + 2b_n$ を証明せよ．

（2） $a_n - b_n\sqrt{5} = (2-\sqrt{5})^n$ を証明せよ．

（3） $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

（4） (3) の L について，$n \geqq 3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 0.001$$

等式 $a_n+b_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n$ によって定められる自然数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について，

（1） $a_{n+1}=2a_n+5b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ を証明せよ．

（2） $a_n-b_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^n$ を証明せよ．

（3） $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

（4） (3) の L について，$n\geqq 3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<0.001$$

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，漸化式を作り，(2) は数学的帰納法で証明します．(3) は具体的に a_n, b_n を求めて極限をとっても計算できますが，はさみうちの原理を用いることもできます．(4) は具体的な値を用いて評価しなければいけないので，うまく不等式を作っていくため試行錯誤しましょう．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$a_n+b_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n$ …… ① とおく．この式において n に $n+1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}&=(2+\sqrt{5})^{n+1}\\ &=(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^n\\ &=(2+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5}) \qquad (\because\ ①)\\ &=(2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n は自然数で，$\sqrt{5}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+5b_n\\ b_{n+1}=a_n+2b_n \end{cases}$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

$a_n-b_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^n$ …… ② とおく．① 式において $n=1$ を代入すると，

$$a_1+b_1\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$$

が成り立ち，a_1, b_1 は自然数で，$\sqrt{5}$ は無理数であるから，$a_1=2$，$b_1=1$ …… ③ が成り立つ．

② が成り立つことを数学的帰納法で示す．

（i） $n=1$ のとき，③ を用いると，

$$(\text{左辺})=a_1-b_1\sqrt{5}=2-\sqrt{5}=(\text{右辺})$$

が成り立つ．よって，$n=1$ のとき，② は成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，$a_k-b_k\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^k$ が成り立つと仮定する．この式の両辺に $(2-\sqrt{5})$ をかけると，

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{5})^{k+1}&=(2-\sqrt{5})(a_k-b_k\sqrt{5})=(2a_k+5b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{5}\\&=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{5}\qquad(\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.

ゆえに，(ｉ),(ii) より，すべての自然数 n について ② が成り立つことが示された.

(3)　①＋② より，

$$2a_n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n\qquad\therefore\ a_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2}$$

①－② より，

$$2\sqrt{5}b_n=(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n\qquad\therefore\ b_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}L&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2}}{\dfrac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\frac{1+\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}=\boldsymbol{\sqrt{5}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4)　**【証明】**

(3) より，$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|<0.001$ であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|&=\left|\sqrt{5}\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}\left|\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}-1\right|\\&=\sqrt{5}\left|\frac{2(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}\right|=\sqrt{5}\left|\frac{2}{\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^n-1}\right|\\&=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(-1)^n(9+4\sqrt{5})^n-1}\right|\end{aligned}$$

$9+4\sqrt{5}>9+4\cdot2=17$ であり，n の偶奇で場合分けを行うと，

（ｉ） n が偶数のとき，$n\geqq4$ であるから，$(9+4\sqrt{5})^n>17^4$

$$(\text{左辺})=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(9+4\sqrt{5})^n-1}\right|<\frac{2\sqrt{5}}{17^4-1}<\frac{6}{83520}=0.00007\cdots<0.001$$

（ii） n が奇数のとき，$n\geqq3$ であるから，$(9+4\sqrt{5})^n>17^3$

$$(\text{左辺})=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(9+4\sqrt{5})^n+1}\right|<\frac{2\sqrt{5}}{17^3+1}<\frac{2\cdot2.3}{4914}=0.0009\cdots<0.001$$

ゆえに，いずれにしても $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|<0.001$ が成り立つので，示された.　　（証明終）

◇　♡

解説

(3) では，具体的に a_n, b_n を求めて極限を取りました．そのため，$-1<\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}<0$ の形を作って，その極限が 0 になることを利用しています．(4) では，$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|$ の値を不等式を使って評価しなければいけないので，より大きい値で置き換えていきます．ただし，n が分子分母にあると評価しづらいので，式変形によって分母だけに n がくるように変形します．経験がないと難しく感じますが，入試では比較的よく出題されるので経験を積みましょう．

同じ大きさの正四面体を 18 個入れた箱があり，その中の各四面体のそれぞれの面には 1 から 9 までの 9 個の数字のうちのどれか 1 つが書いてある．どの四面体についても，その 4 面の数字は互いに異なっており，また，1 から 9 までのどの 2 つの数字の組に対しても，その両方の数字を同時に含む四面体の個数は一定となっている．

（1） 数字 1 と 2 を同時に含む四面体の個数はいくつか．

（2） 箱の中をよくかきまぜて 1 個の四面体を取り出すとき，それが数字 k を含む確率を P_k とする．すべての $P_k(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9)$ が等しいことを証明せよ．

同じ大きさの正四面体を 18 個入れた箱があり，その中の各四面体のそれぞれの面には 1 から 9 までの 9 個の数字のうちのどれか 1 つが書いてある．どの四面体についても，その 4 面の数字は互いに異なっており，また，1 から 9 までのどの 2 つの数字の組に対しても，その両方の数字を同時に含む四面体の個数は一定となっている．

（1） 数字 1 と 2 を同時に含む四面体の個数はいくつか．

（2） 箱の中をよくかきまぜて 1 個の四面体を取り出すとき，それが数字 k を含む確率を P_k とする．すべての $P_k(k=1,\,2,\,\cdots\cdots,\,9)$ が等しいことを証明せよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

題意を取るのが難しい問題です．正四面体を立体的にかくのではなく．4 つの面があればよいので，正方形 4 つで考えても同じであることに気づけば，図もかきやすく思考の手助けになるでしょう．

♣ ♠

解答

（1） 1 から 9 の 9 つの数の中から異なる 2 つの数を取り出す方法は，

$${}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36\ (\text{通り})$$

ある．4 つの面に 2 組の数をかく方法は，${}_4\mathrm{C}_2=6$（通り）あるので，数字 1 と 2 を同時に含む四面体の個数を n とすると，

$$18\times 6=36n \qquad \text{よって，}n=3$$

となるので，求める個数は **3 (個)**……**(答)**

（2） **【証明】**

数字 k を含む確率を考える．k と組になる数は，1 から 9 のうち k を除く 8 通りがあり，その組は (1) よりそれぞれ 3 個ずつ存在しているので，数 k を含む組の総数は，

$$8\times 3=24\ (\text{個})$$

である．ここで，数 k が書かれている四面体の 4 つの数が

$$(k,\,a,\,b,\,c)$$

であるとすると，k を含む組は $(k,\,a),\,(k,\,b),\,(k,\,c)$ の 3 組ができるので，k が書かれている四面体の個数を m とすると，

$$3m=24 \qquad \text{よって，}m=8$$

を得る．したがって，$P_k=\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}$ となり，すべての $k\ (k=1,\,2,\,\cdots\cdots,\,9)$ について同様のことが言えるので，題意は示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

題意を理解するのが少々難しい問題ですが，問題文の意味が理解できれば計算は大したことありません．要約すると次のようになります．

18 個の四面体 1 つ 1 つにおいて，そこに書かれている 4 つの数から出来上がる 6 つの組は全部で 108 個あることがわかります．一方，1 から 9 までの数を 2 つずつ組合せてできる (1, 2), (1, 3), (1, 4), …, (8, 9) の 36 組が同じ数だけ存在していると言っているのですから，これら 1 つ 1 つの組は，

$$108 \div 36 = 3\ (\text{組})$$

あることが求められるというわけです．

空間の点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，S 上の相異なる 3 点 A, B, C は点 O を含む 1 つの平面上にあるとする．点 P が S 上を自由に動きまわるとして，次の問いに答えよ．

(1)　△ABC が正三角形のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$ は，P の位置によらず一定であることを示せ．

(2)　△ABC が $\angle \mathrm{C}=90^\circ$ である直角三角形のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ．

空間の点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，S 上の相異なる 3 点 A, B, C は点 O を含む 1 つの平面上にあるとする．点 P が S 上を自由に動きまわるとして，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC が正三角形のとき $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ は，P の位置によらず一定であることを示せ．

(2) $\triangle$ABC が $\angle \mathrm{C}=90^\circ$ である直角三角形のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ の最大値と最小値を求めよ．

【テーマ】：位置ベクトルの応用

方針

点 O を始点とした位置ベクトルを考えます．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ などと置いて考えるとよいでしょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}-\vec{p},\ \ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}-\vec{p},\ \ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}-\vec{p}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 &= |\vec{a}-\vec{p}|^2+|\vec{b}-\vec{p}|^2+|\vec{c}-\vec{p}|^2\\ &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2\\ &= 6-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p} \qquad \left(\because\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{p}|=1\right)\end{aligned}$$

である．ここで $\triangle$ABC が正三角形であることから，点 O は $\triangle$ABC の外心であり，かつ重心でもあるから，

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{0} \qquad \therefore\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=6$ となるので，点 P の位置によらず一定であることが示された．**(証明終)**

(2) 題意より，辺 AB は球面 S の直径となる．よって，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ であるから，(1) から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=6-2\vec{c}\cdot\vec{p}$$

を得る．ここで，$\vec{c}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) とすると，

$$\vec{c}\cdot\vec{p}=|\vec{c}||\vec{p}|\cos\theta=\cos\theta \qquad \left(\because\ |\vec{c}|=|\vec{p}|=1\right)$$

であり，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であることから，

$$-1\leqq \vec{c}\cdot\vec{p}\leqq 1$$

よって，

$$-2\leqq -2\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq 2 \iff 4\leqq 6-2\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq 8$$

$$\therefore\ 4\leqq |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\leqq 8$$

ここで，$\vec{c}=\vec{p}$ のとき $\theta=0^\circ$ であり，$\vec{c}=-\vec{p}$ のとき，$\theta=180^\circ$ である．したがって，等号が成立する θ が存在するので，最大値・最小値は存在する．

ゆえに，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \mathbf{8} \\ \textbf{最小値}\quad \mathbf{4} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ に気付けるかどうかがポイントです．正三角形であることは，重心と外心と内心は一致することを知っておく必要があります．(2) では，AB が球の直径になることに気付いてさらに $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ を利用するという考えが必要です．ちなみに本問の設定は空間ですが，実際は平面の知識があれば十分解答できます．空間を意識しすぎると (2) が難しく感じるかもしれません．また，最後の部分で等号が成立するための θ がきちんと存在するかどうかを吟味することは非常に大切なので，忘れないようにしましょう．

a を整数，n を自然数とし，$f(x) = x^4 + 3ax^2 + 2ax - 2 \cdot 3^n$ とおく．

（1） 有理数 r が $f(x) = 0$ の解であれば，r は整数であることを示せ．

（2） a が $f(x) = 0$ の解であるとき，a および n の値を求めよ．

a … n … $f(x)=x^4+3ax^2+2ax-2\cdot 3^n$

(1) r … $f(x)=0$ … r …

(2) a … $f(x)=0$ … a … n …

【テーマ】：整数問題

方針

(1) $r=\dfrac{t}{s}$ (t, s … $s \neq 0$) … $s=1$ … (2) … a …

解答

(1) s, t … $s \neq 0$ … $r=\dfrac{t}{s}$ …

$$\left(\frac{t}{s}\right)^4+3a\left(\frac{t}{s}\right)^2+2a\left(\frac{t}{s}\right)-2\cdot 3^n=0 \iff \frac{t^4}{s}=-(3ast^2+2as^2t-2\cdot 3^n s^3)$$

… a, s, t, n … s, t … $s=\pm 1$ … $r=\pm t$ … r … (証明終)

(2) a … $f(x)=0$ …

$$a^4+3a^3+2a^2-2\cdot 3^n=0 \iff a^2(a+1)(a+2)=2\cdot 3^n$$

… a … 2 … a … a^2, $a+2$ … $a+1$ …

$$a+1=\pm 2 \qquad \therefore\ a=-3,\ 1$$

(i) $a=-3$ … $a^2(a+1)(a+2)=(-3)^2\cdot(-2)\cdot(-1)=2\cdot 3^2$ … $n=2$

(ii) $a=1$ … $a^2(a+1)(a+2)=1^2\cdot 2\cdot 3=2\cdot 3$ … $n=1$

… a, n …

$$\boldsymbol{(a,\ n)=(-3,\ 2),\ (1,\ 1)}\cdots\cdots(答)$$

解説

… (1) … (2) … a … a … a^2 … 2 … 2 … a …

xy P(x, y) k $(1 \leqq k \leqq 6)$ k P $\left(x+\dfrac{k-3}{2},\ y\right)$ k $\left(x,\ y+\dfrac{k-4}{2}\right)$ P n P (x_n, y_n) $\dfrac{1}{6}$

(1) $(x_6, y_6) = (3, 3)$

(2) $(x_5, y_5) = (-1, 2)$

(3) (x_n, y_n) $|x_n| + |y_n| \leqq n-1$

xy 　P(x, y)と こ い々 ゎ さ k $(1 \leqq k \leqq 6)$お か kお こ P ゎ $\left(x+\dfrac{k-3}{2},\ y\right)$と こ kお こ $\left(x,\ y+\dfrac{k-4}{2}\right)$と P お ど こ n い々 ゎ さ P ゎ (x_n, y_n) か と ぞこ い々 ず $\dfrac{1}{6}$

(1) $(x_6, y_6)=(3, 3)$ ゎ べ

(2) $(x_5, y_5)=(-1, 2)$ ゎ べ

(3) (x_n, y_n)お $|x_n|+|y_n| \leqq n-1$ ゎ ゎ べ

【テーマ】：移動の確率

方針

と ゆ え ゎ び と こ $\dfrac{1}{6}$, かび 々 (3) $\dfrac{1}{3}$ ゎ お こ びこえ (1), (2) て

♣ ♠

解答

(1) 1 1 1 1 び $\dfrac{1}{6}$ ず と てび $\dfrac{1}{3}$ 6 い々 ゎ さ (3, 3)と べ ど 3 3 こ 々 べ

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{6^6}=\mathbf{\frac{5}{11664}}\cdots\cdots(\text{答}) $$

(2) 5 い々 ゎ $(-1, 2)$と

（ i ） 1 2 2

（ii） 1 3 1

（iii） 1 2 2 え

3 こ 々

（ i ） が ず

$$\frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot6^5}=\frac{5}{6^4}$$

（ii） か ず

$$\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot6^5}=\frac{10}{3\cdot6^4}$$

（iii） か ず

$$\frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot6^3\cdot3^2}=\frac{60}{3\cdot6^4}$$

ど べ

$$\frac{5}{6^4}+\frac{10}{3\cdot 6^4}+\frac{60}{3\cdot 6^4}=\frac{15+10+60}{3\cdot 6^4}=\mathbf{\frac{85}{3888}}\cdots\cdots(\text{答})$$

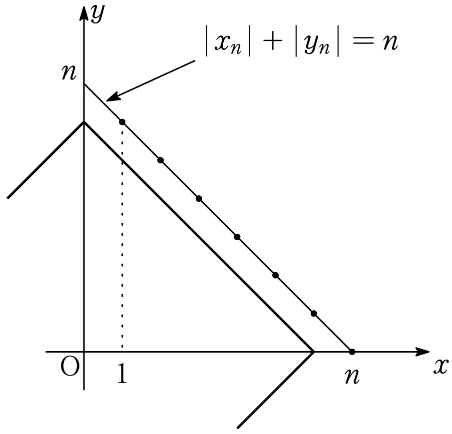
(3) n イ か P $|x_n|+|y_n|\leqq n$ と

$|x_n|+|y_n|=n$ と P お べ 々

$x_n\geqq 1,\ y_n\geqq 0,\ x_n+y_n=n$ と P お

か p と k と $n-k$

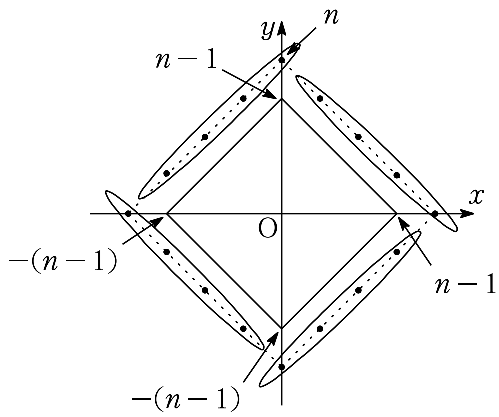
$$p=\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k-{}_n\mathrm{C}_n\right)$$



$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k$$

お と 々 $x=1$

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$$



ど

$$p=\left(\frac{1}{6}\right)^n(2^n-1)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

と と
べ

$$1-4p=\mathbf{1-\frac{4}{3^n}+\frac{4}{6^n}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) 々 (2) お ど さ お x y
々 1 2 々
お 々 ど か (3) び ど 々
ど ど 々 お

n P $|x_n|+|y_n|\leqq n$ と

々 ど て 々 $|x_n|+|y_n|=n$ と P お ど て
び 々 々 ど お 々 $\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$
お Σ C す か 々

$0 < a < 2$ こ 2 3

$$y = ax^3 - (2a+1)x^2 + ax + 1,$$

$$y = (a-2)x^3 + 3x^2 - 3ax + 1$$

び S

(1) S べ

(2) S お a べ

$0<a<2$ こ　2　3

$$y=ax^3-(2a+1)x^2+ax+1,$$

$$y=(a-2)x^3+3x^2-3ax+1$$

び　S

(1)　S　べ

(2)　S お　a　べ

【テーマ】：３次関数のグラフで囲まれた面積の和

方針

3　2　び　べ　x　べ　ぞ

解答

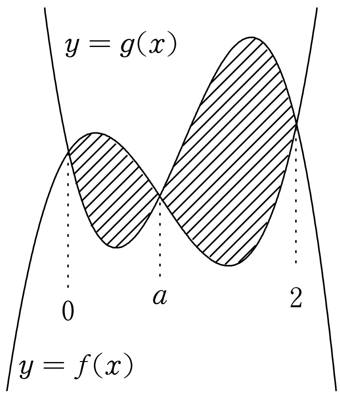
(1)　$f(x)=ax^3-(2a+1)x^2+ax+1$，$g(x)=(a-2)x^3+3x^2-3ax+1$ とおくと，

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの交点の x 座標は，

$$ax^3-(2a+1)x^2+ax+1=(a-2)x^3+3x^2-3ax+1$$

$$2x^3-(2a+4)x^2+4ax=0$$

$$2x(x-a)(x-2)=0$$



$0<a<2$ より，$x=0,\ a,\ 2$ である．

よって，右図斜線部分の面積が S であるから，

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_a^2\{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_2^a\{f(x)-g(x)\}\,dx\\
&=2\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx+2\int_2^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx\\
&=2\left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\ \right]_0^a+2\left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\ \right]_2^a\\
&=2\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+2)a^3+a^3\right)\times 2-2\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}(a+2)+4a\right)\\
&=a^4-\frac{4}{3}(a+2)a^3+4a^3-8+\frac{16}{3}(a+2)-8a\\
&=\boldsymbol{-\frac{1}{3}a^4+\frac{4}{3}a^3-\frac{8}{3}a+\frac{8}{3}}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned}
S'&=-\frac{1}{3}(4a^3-12a^2+8)\\
&=-\frac{4}{3}(a^3-3a^2+2)\\
&=-\frac{4}{3}(a-1)(a^2-2a-2)
\end{aligned}$$

よって，$S'=0$ のとき，$a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$ であり，$0<a<2$ より $a=1$ である．よって，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	1	$\nearrow$	

よって，S が最小となる a の値は $\boldsymbol{a=1}$……(答)

◇ ♡

解説

3 次関数のグラフで囲まれる面積を求める場合は，どちらの関数が上にくるかをきちんと吟味しておく必要があります．本問では $y=f(x)$ の 3 次の係数が正で，$y=g(x)$ の 3 次の係数が負であることと，交点の x 座標の値から上下関係が判断できます．文字が入っているため正確なグラフをかくことができないので，解答にあるように位置関係をつかむグラフがかけていれば十分でしょう．

【3 次の積分公式】

α, β, γ を実数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=-\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta-2\gamma)$$

特に，$\gamma=\alpha$，$\gamma=\beta$ のとき，それぞれ有名公式

（ｉ） $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$

（ii） $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$

が成り立つ．

（ｉ)，(ii）は，3 次関数のグラフとその接線で囲まれる部分の面積を求める際に重宝する．

本問では，上記公式を使っても面積 S を求めることができる．

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_a^2\{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_2^a\{f(x)-g(x)\}\,dx\\
&=2\int_0^a x(x-a)(x-2)\,dx+2\int_2^a x(x-a)(x-2)\,dx\\
&=-\frac{2}{12}a^3(a-4)-\frac{2}{12}(a-2)^3(a+2)\\
&=\boldsymbol{-\frac{1}{3}a^4+\frac{4}{3}a^3-\frac{8}{3}a+\frac{8}{3}}\text{……(答)}
\end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ は，$0 < a_1 < 1$,

$$a_{n+1} = \frac{n{a_n}^2 + 2n + 1}{a_n + 3n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしているとする.

(1)　$0 < a_n < 1$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを示せ.

(2)　$1 - a_{n+1} < \dfrac{2}{3}(1 - a_n)$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ を求めよ.

数列 $\{a_n\}$ は，$0<a_1<1$，

$$a_{n+1}=\frac{na_n{}^2+2n+1}{a_n+3n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしているとする．

（1） $0<a_n<1$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）であることを示せ．

（2） $1-a_{n+1}<\frac{2}{3}(1-a_n)$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）であることを示し，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

（3） $\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は数学的帰納法で証明します．(2) は (1) の証明途中で現れた式を利用して示していきます．(3) は，不定形の極限処理がポイントです．ここでも (1) の証明途中で現れた式を利用すると楽に計算できるでしょう．

解答

（1） **【証明】**

（ｉ） $n=1$ のとき，与えられた条件より成り立つことは明らかである．

（ii） $n=k\ (k\geqq 1)$ のとき，

$$0<a_k<1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定する．このとき，与えられた漸化式に $n=k$ を代入すれば，① と $k\geqq 1$ より，

$$a_{k+1}=\frac{ka_k{}^2+2k+1}{a_k+3k}>0$$

が成り立つ．次に，

$$\begin{aligned}1-a_{k+1}&=1-\frac{ka_k{}^2+2k+1}{a_k+3k}\\&=\frac{a_k+3k-ka_k{}^2-2k-1}{a_k+3k}\\&=\frac{-ka_k{}^2+a_k+k-1}{a_k+3k}\\&=\frac{(ka_k+k-1)(1-a_k)}{a_k+3k}\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であり，① より $1-a_k>0$, $a_k+3k>0$ である．また，① より，

$$0<ka_k<k \iff k-1<ka_k+k-1<2k-1$$

が得られ，$k-1\geqq 0$ であることから，$ka_k+k-1>0$ が示される．よって，$1-a_{k+1}>0$ が示されるので，$0<a_{k+1}<1$ が示された．すなわち，$n=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，数学的帰納法によって $0<a_n<1$ であることが示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

(1) の ② より，$1-a_{n+1}=\frac{(na_n+n-1)(1-a_n)}{a_n+3n}=\frac{na_n+n-1}{a_n+3n}(1-a_n)$

ここで，(1) より，$na_n+n-1<n+n=2n$，$a_n+3n>3n$ であるから，$\dfrac{na_n+n-1}{a_n+3n}<\dfrac{2}{3}$ である．
したがって，

$$1-a_{n+1}=\frac{na_n+n-1}{a_n+3n}(1-a_n)<\frac{2}{3}(1-a_n)$$

が成り立つことが示された． **(証明終)**

さらに，このとき，

$$\begin{aligned}0<1-a_n &< \frac{2}{3}(1-a_{n-1})\\ &<\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-a_{n-2})\\ &<\cdots\cdots\\ &<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)\end{aligned}$$

$1-a_1>0$ であり，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　与えられた漸化式と ② 式を用いて式変形を行うと，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{na_n{}^2+2n+1}{a_n+3n}}{1-a_n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n-na_n{}^2-2n-1}{(1-a_n)(a_n+3n)}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(na_n+n-1)(1-a_n)}{(1-a_n)(a_n+3n)}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n-1}{a_n+3n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_n}{n}+3}\end{aligned}$$

$0<a_n<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ である．さらに，(2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\mathbf{\frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

解けない漸化式においては，本問のように極限を求める問題が主流です．非常に多くの類題があり，数列の極限では頻出問題なので必ずマスターしておく必要があります．

なお，(2) においては，収束することがわかっている場合，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$（有限確定値）として，与えられた漸化式に代入することで，極限値を予想することもできます．本問の場合は，

$$a_{n+1}=\frac{a_n{}^2+2+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_n}{n}+3}$$

として，$n\to\infty$ とします．$0<a_n<1$ は示しているので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ となることがわかります．あとは，a_n の極限値を α として考えればよいので，

$$\alpha=\frac{\alpha^2+2}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad(\alpha-1)(\alpha-2)=0$$

より，$\alpha=1,2$ を得ますが，$0<a_n<1$ なので，$\alpha=1$ ではないかな？と予想できます．ただし，この方法はあくまで極限値を予想するために行うもので，解答で使うには論理が十分ではないので気を付けましょう．